

Exercice 1

10 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par

$$f(x) = \frac{2 + 3x}{4 + x}.$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1 .
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.
4. (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
 (b) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité : $\ell = \frac{2 + 3\ell}{4 + \ell}$
 (c) Déterminer la valeur de la limite ℓ .

Exercice 2

10 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x - 1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.
On appelle \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère.

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en 1.
 (b) En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x - 2)e^x}{(x - 1)^2}.$$

- (b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on a

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x - 1)^3}.$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.

5. (a) Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.
 (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Corrigé de l'exercice 1

“`latex`

Correction

1. **Calcul de u_1 .**

$$\begin{aligned} u_1 &= f(3) \\ &= \frac{2 + 3 \times 3}{4 + 3} \\ &= \frac{11}{7}. \end{aligned}$$

2. **Montrer que f est croissante sur $[0; 4]$ (formule du quotient).**

On pose $u(x) = 2 + 3x$ et $v(x) = 4 + x$, ainsi $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec

$$u'(x) = 3 \quad \text{et} \quad v'(x) = 1.$$

D'après

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2},$$

on obtient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{3 \times (4 + x) - (2 + 3x) \times 1}{(4 + x)^2} \\ &= \frac{12 + 3x - 2 - 3x}{(4 + x)^2} \\ &= \frac{10}{(4 + x)^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0; 4]$, $(4 + x)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$: f est strictement croissante sur $[0; 4]$.

3. **Montrer que, pour tout n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.**

b. Pour tout entier naturel n , on pose la propriété

$$\mathcal{P}_n : \quad 1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3.$$

On va démontrer par récurrence que la propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a d'après l'énoncé $u_0 = 3$. On a calculé précédemment :

$$u_1 = \frac{11}{7}.$$

On vérifie alors :

$$1 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3.$$

La propriété \mathcal{P}_0 est vraie. La propriété est donc initialisée au rang $n = 0$.

Hérédité :

Soit k un entier naturel tel que la propriété \mathcal{P}_k soit vraie, c'est-à-dire :

$$1 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 3.$$

On cherche à montrer que la propriété \mathcal{P}_{k+1} est vraie, c'est-à-dire :

$$1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 3.$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$1 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 3.$$

La fonction f est croissante sur $[0; 4]$. On en déduit :

$$f(1) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(3).$$

On calcule :

$$f(1) = \frac{2 + 3 \times 1}{4 + 1} = \frac{5}{5} = 1,$$
$$f(3) = \frac{2 + 3 \times 3}{4 + 3} = \frac{11}{7} \leq 3.$$

Ainsi :

$$1 \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq 3.$$

Or, par définition de la suite, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Donc :

$$1 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 3.$$

Ainsi, la propriété \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

Conclusion :

La propriété \mathcal{P}_n est initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire. Par le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3.$$

4. (a) Montrer que (u_n) est convergente.

D'après la question 3, (u_n) est décroissante et minorée par 1. Elle est donc convergente.

(b) on obtient

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = \frac{2 + 3\ell}{4 + \ell}.$$

(c) Déterminer ℓ .

$$\ell = \frac{2 + 3\ell}{4 + \ell} \iff \ell(4 + \ell) = 2 + 3\ell$$
$$\iff \ell^2 + \ell - 2 = 0$$
$$\iff (\ell - 1)(\ell + 2) = 0.$$

Donc $\ell = 1$ ou $\ell = -2$. Or $u_n \in [1; 3]$ pour tout n , donc $\ell \in [1; 3]$ et

$$\boxed{\ell = 1}.$$

Corrigé de l'exercice 2

1. (a) La fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} donc : $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e^1 = e > 0$.
 Par limite de la somme, on a : $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$, et comme on travaille sur $] -\infty ; 1[$, on a $x - 1 < 0$. (on peut noter $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0^-$).
 Par limite du quotient, on a : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.
- (b) On en déduit que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote verticale, d'équation $x = 1$.
2. On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$;
 Par limite de la somme, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$,
 Par limite du quotient, on en déduit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
 On en déduit que \mathcal{C} admet également une asymptote, d'équation $y = 0$, au voisinage de $-\infty$.
3. (a) f est dérivable sur $] -\infty ; 1[$, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle, avec la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur l'intervalle.
 $\forall x \in] -\infty ; 1[$, $f'(x) = \frac{e^x \times (x - 1) - e^x \times 1}{(x - 1)^2}$
 $= \frac{e^x \times (x - 1 - 1)}{(x - 1)^2}$
 $= \frac{(x - 2)e^x}{(x - 1)^2}$
- (b) La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur \mathbb{R} , et pour tout x dans $] -\infty ; 1[$, $(x - 1)^2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $(x - 2)$.
 $x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$, donc sur $] -\infty ; 1[$, $(x - 2)$ est strictement négatif, donc $f'(x)$ également.
 Finalement, on peut donc en déduire que f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 1[$, et donc, on a le tableau de variations suivant (avec les limites justifiées aux questions 1. a. et 2.) :

x	$-\infty$	1
signe de $f'(x)$		-
variations de f	0	$-\infty$

4. (a) Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on va étudier le signe de $f''(x)$.
 Comme, pour tout x dans $] -\infty ; 1[$, on a $(x - 1) < 0$ et donc $(x - 1)^3 < 0$ et $e^x > 0$, on en déduit que le signe de $f''(x)$ est l'opposé du signe du trinôme : $x^2 - 4x + 5$.
 Or, ce trinôme a un discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4$ qui est strictement négatif, donc n'admet pas de racine, et donne des images strictement positives (car le coefficient dominant est positif) pour tout réel x .
Rem. On peut écrire :
 $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 - 4 + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$: le trinôme est positif quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
 Finalement, la dérivée seconde f'' est à valeurs strictement négatives sur $] -\infty ; 1[$, on en déduit que la fonction f est concave sur $] -\infty ; 1[$.
- (b) Pour déterminer l'équation de T , il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:

$$- \quad f'(0) = \frac{(0 - 2)e^0}{(0 - 1)^2} = \frac{-2}{1} = -2;$$

$$- f(0) = \frac{e^0}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

La formule classique donne une équation pour T :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \iff y = -2x - 1$$

L'équation réduite de T est donc : $y = -2x - 1$.

(c) Puisque f est concave sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$, la courbe \mathcal{C} est donc située sous ses tangentes, notamment sous la tangente T , sur cet intervalle.

Pour tout réel x dans cet intervalle, l'ordonnée d'un point sur la courbe \mathcal{C} (c'est-à-dire $f(x)$) est donc inférieure ou égale à l'ordonnée du point ayant la même abscisse sur la tangente T (or, sur la tangente T , l'ordonnée du point d'abscisse x est $-2x - 1$, d'après la question précédente).

On en déduit donc : $x \in] -\infty ; 1[\implies f(x) \leq -2x - 1$

$$\implies \frac{e^x}{x-1} \leq -2x - 1$$

$$\implies e^x \geq (x-1)(-2x-1)$$

car sur $] -\infty ; 1[$, $x - 1 < 0$

$$\implies e^x \geq (-2x-1)(x-1)$$

On arrive donc à l'inégalité demandée.

5. (a) La fonction f est :

— continue sur $] -\infty ; 1[$ (car dérivable sur cet intervalle);

— strictement décroissante sur $] -\infty ; 1[$ (d'après la question **3. b.**);

— telle que -2 est une valeur intermédiaire entre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f = -\infty$;

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.

(b) Comme on a repéré à la question **4. b.** que $f(0) = -1$, on sait que la solution sera à chercher dans l'intervalle $]0 ; 1[$.

À l'aide de la calculatrice, par balayage, on a :

$$- f(0,31) \approx -1,98 > -2;$$

$$- f(0,32) \approx -2,03 < -2;$$

Un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est $0,31 < \alpha < 0,32[$.