EVALUATION DE COURS : NOMBRES COMPLEXES PARTIE GÉOMÉTRIE

Nom : ....   Prénom : ....   Classe : Terminale Expert

– Calculatrice autorisée –   6 mars 2025

Exercice 1 — 4 points

1. Donner la forme algébrique du nombre complexe $z = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.
2. Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $z = -2\sqrt{3} - 2\text{i}$

Exercice 2 — 4 points

Déterminer le lieu géométrique des points M d'affixe z tels que :

1. $|z - (1+i)| = 3$.
2. $|z-2| = |z+i|$.

Exercice 3 — 12 points

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des nombres complexes non nuls z tels que les points A, N et P d'affixes respectives 1, z^2 et $\frac{1}{z}$ soient alignés.
Chaque partie est indépendante.

Partie A :

On pose $z = -\frac{1}{2} + i$.

1. Déterminer la forme algébrique de z^2, puis de $\frac{1}{z}$.
2. Calculer l'affixe de chacun des vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PN}$.
3. Démontrer que les points A, N et P sont alignés.

Partie B :

1. Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 0$,

$$z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1)\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

2. En déduire une condition pour que les vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PN}$ soient colinéaires.

Partie C :

On pose $z = x + iy$ avec x et y nombres réels.

1. Déterminer la forme algébrique de $z^2 + z + 1$.
2. En déduire alors l'ensemble $\mathcal{F}$.

Evaluation de cours : Nombres complexes partie géométrie

- Correction -

Corrigé de l'exercice 1

1. Pour $z_4 = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$, on a :

$$z_4 = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Corrigé de l'exercice 2

1. L'équation $|z-(1+i)| = 3$ représente un cercle de centre $(1,1)$ et de rayon 3.
2. L'équation $\arg(z-(2-i)) = \frac{\pi}{4}$ représente une demi-droite issue du point $(2,-1)$ et faisant un angle de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des réels.
3. L'équation $|z-2| = |z+i|$ signifie que le point M est équidistant des points $A(2,0)$ et $B(0,-1)$. Cela définit la médiatrice du segment $[AB]$, qui est une droite.
   En posant $z = x+iy$, on a :

$$|z-2| = |z+i| \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y+1)^2}.$$

   En élevant au carré et en simplifiant, on obtient :

$$-4x+4 = 2y+1 \Rightarrow 4x+2y-3 = 0.$$

   L'équation cartésienne de la droite est donc $4x+2y-3=0$.

Corrigé de l'exercice 3

1. (a) **Calcul de z^2 :**
   On a $z = -\frac{1}{2}+i$. Alors :

$$z^2 = \left(-\frac{1}{2}+i\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times i + i^2.$$

$$z^2 = \frac{1}{4} - i - 1 = -\frac{3}{4} - i.$$

   Forme algébrique de z^2 :

$$z^2 = -\frac{3}{4} - i.$$

   Calcul de $\frac{1}{z}$:
   On a $z = -\frac{1}{2}+i$. Pour calculer $\frac{1}{z}$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de z, c'est-à-dire $\overline{z} = -\frac{1}{2} - i$.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+i} = \frac{-\frac{1}{2}-i}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2}.$$

$$\frac{1}{z} = \frac{-\frac{1}{2}-i}{\frac{1}{4}+1} = \frac{-\frac{1}{2}-i}{\frac{5}{4}} = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i.$$

   Forme algébrique de $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{z} = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i.$$

(b) **Affixe de $\overrightarrow{PA}$:**

Le point P a pour affixe $\frac{1}{z} = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$, et le point A a pour affixe 1.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{PA}$ est :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{PA}} &= z_A - z_P \\ &= 1 - \left(-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i\right) \\ &= 1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i \\ &= \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i. \end{aligned}$$

Affixe de $\overrightarrow{PN}$:

Le point N a pour affixe $z^2 = -\frac{3}{4} - i$, et le point P a pour affixe $\frac{1}{z} = -\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$.

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{PN}$ est :

$$\begin{aligned} z_N - z_P &= \left(-\frac{3}{4} - i\right) - \left(-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i\right) \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{2}{5} - i + \frac{4}{5}i \\ &- \frac{15}{20} + \frac{8}{20} - i + \frac{4}{5}i \\ &= -\frac{7}{20} - \frac{1}{5}i. \end{aligned}$$

(c) **Démontrer que les points A, N et P sont alignés :**

Pour démontrer que les points A, N et P sont alignés, il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PN}.$$

$$z_{\overrightarrow{PA}} = \frac{7}{5} + \frac{4}{5}i \quad \text{et} \quad \overrightarrow{PN} = -\frac{7}{20} - \frac{1}{5}i.$$

On cherche k tel que :

$$\frac{7}{5} + \frac{4}{5}i = k\left(-\frac{7}{20} - \frac{1}{5}i\right).$$

En comparant les parties réelles et imaginaires, on obtient :

$$\frac{7}{5} = -\frac{7}{20}k \quad \text{et} \quad \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}k.$$

De la première équation :

$$k = -\frac{\frac{7}{5}}{\frac{7}{20}} = -\frac{7}{5} \times \frac{20}{7} = -4.$$

De la deuxième équation :

$$k = -\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = -4.$$

Les deux équations donnent $k = -4$, donc $\overrightarrow{PA} = -4\overrightarrow{PN}$
et les vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires.
Ainsi, les points A, N et P sont alignés.

2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on développe

$$\begin{aligned}(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right) &= z^2+z+1-\frac{z^2+z+1}{x} \\ &= z^2+z+1-z-1-\frac{1}{z} \\ &= z^2-\frac{1}{z}\end{aligned}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned}z_{\overrightarrow{PA}} &= z_A - z_P \\ &= 1-\frac{1}{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_{\overrightarrow{PN}} &= z_N - z_P \\ &= z^2-\frac{1}{z}\end{aligned}$$

on déduit de l'égalité précédente que :

$$\begin{aligned}&(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right) = z^2-\frac{1}{z} \\ \iff\ & \left(z^2+z+1\right) z_{\overrightarrow{PA}} = z_{\overrightarrow{PN}}\end{aligned}$$

Si z^2+z+1 est réel, on aura

$$\begin{aligned}&\left(z^2+z+1\right) z_{\overrightarrow{PA}} = z_{\overrightarrow{PN}} \\ \iff\ & \left(z^2+z+1\right) \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PN} \\ \iff\ & k\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PN} \quad \text{avec} \quad k = z^2+z+1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Si $z^2+z+1 \in \mathbb{R}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires.
Remarque : *On demande ici une condition de colinéarité et non une équivalence. Mais l'équivalence est vérifiée. Si $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires alors $z^2+z+1 \in \mathbb{R}$*

3. (a) Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
On sait qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, tels que : $z = x + iy$,
on a alors

$$\begin{aligned}z^2+z+1 &= (x+\mathrm{i}y)^2 + (x+\mathrm{i}y) + 1 \\ &= (x^2+2\mathrm{i}xy-y^2+x+\mathrm{i}y+1 \\ &= x^2-y^2+x+1+\mathrm{i}(y+2xy)\end{aligned}$$

(b) Soit $z \in \mathcal{F}$
Les points A , N et P sont alignés par définition de $\mathcal{F}$.
Il est équivalent de dire que les vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PN}$ sont colinéaires.
donc $\exists k \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PN}$
D'après B.1., $k = z^2+z+1 \in \mathbb{R}$.
On a montré que , $z^2+z+1 \in \mathbb{R} \iff 2xy+y=0 \iff y(2x+1)=0$.
Donc, soit $y=0$ soit $x=-\dfrac{1}{2}$.
L'ensemble $\mathcal{F}$ est donc l'ensemble des nombres complexes non nuls de la forme $z = x$ (réels) ou $z = -\dfrac{1}{2} + iy$.