Evaluation de cours spéciale pour Ilan : Les matrices

Nom : .... Prénom : .... Classe : Terminale Expert

– Calculatrice autorisée – 3 mars 2025

Exercice 1 — 6 points

On considère les matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice **P** est inversible puis déterminer $\mathbf{P}^{-1}$.
2. Montrer que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ est une matrice diagonale **D**.
3. Déduire une expression de $\mathbf{A}^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 — 6 points

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer à la main la matrice A^2.
2. Donner l'expression de la matrice $A^2 - 4A + 4I$, où I est la matrice identité d'ordre 2.
3. En déduire que $A(A - 4I) = -4I$.
4. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 3 — 4 points

Résolvez le système suivant par calcul matriciel :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$$

Exercice 4 — 6,5 points

1. À l'aide de la calculatrice, donner la matrice inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire la résolution du système :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 1

1. Pour montrer que **P** est inversible, on calcule son déterminant :

$$\det(\mathbf{P}) = (2)(1) - (1)(1) = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Ainsi, **P** est inversible. Sa matrice inverse est :

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{P})}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Calculons $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On commence par calculer **AP** :

$$\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis on multiplie par $\mathbf{P}^{-1}$:

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{AP}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est bien une matrice diagonale.

3. On a $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$. Donc :

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{PD}^n\mathbf{P}^{-1}.$$

Or, $\mathbf{D}^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effectuant les multiplications, on obtient :

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n & 2^n \\ 3^n & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n - 2^n & -2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n \\ 3^n - 2^n & -3^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 2

1. Calcul de A^2 :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effectuant les calculs, on obtient :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Calcul de $A^2 - 4A + 4I$:

$$A^2 - 4A + 4I = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En simplifiant, on obtient :

$$A^2 - 4A + 4I = \begin{pmatrix} 4 - 8 + 4 & 4 - 4 \\ 0 & 4 - 8 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A^2 - 4A + 4I = 0$, ce qui signifie que le polynôme $P(X) = X^2 - 4X + 4$ s'annule en A.

3. En déduire que $A(A-4I) = -4I$. On a $A^2 - 4A + 4I = 0$, donc $A^2 - 4A = -4I$. En factorisant, on obtient :
$$A(A-4I) = -4I.$$
4. En déduire que la matrice A est inversible et déterminer A^{-1}. Puisque $A(A-4I) = -4I$, on en déduit que A est inversible et :
$$A^{-1} = -\frac{1}{4}(A-4I) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Corrigé de l'exercice 3

Le système peut s'écrire sous forme matricielle **MX** = **B**, où :
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule l'inverse de **M** :
$$\det(\mathbf{M}) = (3)(4) - (-2)(-2) = 12 - 4 = 8.$$
$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la solution est :
$$\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 24 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc, $x = 3$ et $y = 2$.

Corrigé de l'exercice 4

1. La matrice inverse de A est :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Le système peut s'écrire sous forme matricielle A**X** = **B**, où :
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   La solution est :
$$\mathbf{X} = A^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Ainsi, $x = 8$, $y = -3$, et $z = 0$.