Evaluation de cours : Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ (1ère partie)

Nom : .... Prénom : .... Classe : Terminale Expert

– Calculatrice autorisée –

14 novembre 2024

Exercice 1 — 4 points

Déterminer les nombres entiers x et y tels que $x^2 - 2xy = 5$.

Exercice 2 — 4 points

Sachant que le reste de la division euclidienne d'un entier a par 5 est 4, déterminer le reste de la division euclidienne de $2a$ par 5 et de $-3a$ par 5.

Exercice 3 — 4 points

Soit n un entier naturel.
Déterminer, selon les valeurs de n, le quotient et le reste de la division euclidienne de $4n - 3$ par $n + 3$.

Exercice 4 — 4 points

Soit n un entier. On pose $a = n(n^2 - 4)$.
Démontrer que a est un multiple de 3.

Exercice 5 — 4 points

Déterminer les valeurs de x dans chaque cas, sachant que $0 \leqslant x < 7$:

- $18 \equiv x[7]$
- $-2 \equiv x[7]$
- $-12 \equiv x[7]$
- $73 \equiv x[7]$

Corrigé de l'exercice 1

On cherche les entiers x et y tels que :

$$x^2 - 2xy = 5.$$

Factorisons par x dans l'équation donnée :

$$x(x - 2y) = 5.$$

Ainsi, x est un diviseur de 5. Les diviseurs de 5 sont :

$$x \in \{-5\,;\,-1\,;\,1\,;\,5\}.$$

Procédons par disjonction des cas pour trouver y :

- Si $x = 1$, alors :

$$1(1 - 2y) = 5 \iff 1 - 2y = 5 \iff -2y = 4 \iff y = -2.$$

- Si $x = -1$, alors :

$$-1(-1 - 2y) = 5 \iff 1 + 2y = 5 \iff 2y = 4 \iff y = 2.$$

- Si $x = 5$, alors :

$$5(5 - 2y) = 5 \iff 5 - 2y = 1 \iff -2y = -4 \iff y = 2.$$

- Si $x = -5$, alors :

$$-5(-5 - 2y) = 5 \iff 5 + 2y = 1 \iff 2y = -4 \iff y = -2.$$

Les solutions entières sont donc :

$$S = \left\{(1\,;\,-2); (-1\,;\,2); (5\,;\,2); (-5\,;\,-2)\right\}$$

Corrigé de l'exercice 2

On sait que le reste de la division euclidienne de a par 5 est 4.
Cela signifie qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$a = 5q + 4$$

Déterminons le reste de la division euclidienne de $2a$ par 5.
En multipliant a par 2, on obtient :

$$\begin{aligned} 2a &= 2(5q + 4) \\ &= 5 \times 2q + 8 \\ &= 5 \times 2q + 5 + 3 \\ &= 5 \times (2q + 1) + 3 \\ &= 5 \times K + 3 \quad \text{avec } K = 2q + 1 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On a bien $0 \leqslant r = 3 < 5$ donc le reste est 3.

Déterminons maintenant le reste de la division euclidienne de $-3a$ par 5. En multipliant a par -3, on obtient :

$$\begin{aligned}-3a &= -3(5q+4)\\ &= 5\times(-3q)-12\\ &= 5\times(-3q)-15+15-12\\ &= 5\times(-3q-3)+3\\ &= 5\times K+3 \quad \text{avec } K=-3q-3\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

On a bien $0\leqslant r=3<5$ donc le reste est 3.

Corrigé de l'exercice 3

Soit $n\in N$

On cherche $q\in Z$ et $r\in N$ tels que

$$4n-3=(n+3)q+r \quad \text{avec } 0\leqslant r<n+3$$

- On essaie avec $q=4$, d'écrire $4n-3=q(n+3)+r$:

$$4n-3=4(n+3)-9$$

mais cette expression ne convient pas car $-9<0$ et le reste doit être positif ou nul.

- On essaie donc avec $q=3$:

$$4n-3=3(n+3)+n-12.$$

Si le quotient est $q=3$, le reste est $r=n-12$.

Il faut vérifier que $0\leq r<n+3$, c'est-à-dire :

$$0\leq n-12<n+3,$$

ce qui revient à vérifier $n\geq 12$.

Pour $n\geq 12$, le reste de la division euclidienne est donc $r=n-12$.

Nous devons maintenant procéder par disjonction des cas pour les situations où $n<12$:

- **Si $n=0$:**
  On a :
  $$4n-3=4\times 0-3=-3, \quad \text{et } n+3=3.$$
  On écrit :
  $$3=-1\times 3,$$
  donc $q=-1$ et $r=0$
- **Si $n=1$:**
  On a :
  $$4n-3=4\times 1-3=1, \quad \text{et } n+3=4.$$
  On écrit :
  $$1=0\times 4+1,$$
  d'où $q=0$ et un reste $r=1$.
- **Si $n=2$:**
  On a :
  $$4n-3=4\times 2-3=5, \quad \text{et } n+3=5.$$
  On écrit :
  $$5=1\times 5+0,$$
  d'où $q=1$ et un reste $r=0$.

- **Si** $n = 3$ **:**
  On a :
  $$4n - 3 = 4 \times 3 - 3 = 9, \quad \text{et } n + 3 = 6.$$
  On écrit :
  $$9 = 1 \times 6 + 3,$$
  d'où $q = 1$ et un reste $r = 3$.
- **Si** $n = 4$ **:**
  On a :
  $$4n - 3 = 4 \times 4 - 3 = 13, \quad \text{et } n + 3 = 7.$$
  On écrit :
  $$13 = 1 \times 7 + 6,$$
  d'où $q = 1$ et un reste $r = 6$.
- **Si** $n = 5$ **:**
  On a :
  $$4n - 3 = 4 \times 5 - 3 = 17, \quad \text{et } n + 3 = 8.$$
  On écrit :
  $$17 = 2 \times 8 + 1,$$
  d'où $q = 2$ et un reste $r = 1$.
- **Si** $n = 6$ **:**
  On a :
  $$4n - 3 = 4 \times 6 - 3 = 21, \quad \text{et } n + 3 = 9.$$
  On écrit :
  $$21 = 2 \times 9 + 3,$$
  d'où $q = 2$ et un reste $r = 3$.
- **Si** $n = 7$ **:**
  On a :
  $$4n - 3 = 4 \times 7 - 3 = 25, \quad \text{et } n + 3 = 10.$$
  On écrit :
  $$25 = 2 \times 10 + 5,$$
  d'où $q = 2$ et un reste $r = 5$.
- **Si** $n = 8$ **:**
  On a :
  $$4n - 3 = 4 \times 8 - 3 = 29, \quad \text{et } n + 3 = 11.$$
  On écrit :
  $$29 = 2 \times 11 + 7,$$
  d'où $q = 2$ et un reste $r = 7$.
- **Si** $n = 9$ **:**
  On a :
  $$4n - 3 = 4 \times 9 - 3 = 33, \quad \text{et } n + 3 = 12.$$
  On écrit :
  $$33 = 2 \times 12 + 9,$$
  d'où $q = 2$ et un reste $r = 9$.

- **Si** $n = 10$ **:**
  On a :
  $$4n - 3 = 4 \times 10 - 3 = 37, \quad \text{et } n + 3 = 13.$$
  On écrit :
  $$37 = 2 \times 13 + 11,$$
  d'où $q = 2$ et un reste $r = 11$.
- **Si** $n = 11$ **:**
  On a :
  $$4n - 3 = 4 \times 11 - 3 = 41, \quad \text{et } n + 3 = 14.$$
  On écrit :
  $$41 = 2 \times 14 + 13,$$
  d'où $q = 2$ et un reste $r = 13$.

Corrigé de l'exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On sait qu'il existe un unique $k \in Z$ tel que $n = 3k$ ou $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$.
Procédons par disjonction des cas :

- Si $n = 3k$:
  On obtient :
  $$a = n(n^2 - 4) = 3k((3k)^2 - 4) = 3K \quad \text{avec } K = k((3k)^2 - 4) \in \mathbb{Z}$$
  a est donc un multiple de 3.
- Si $n = 3k + 1$:
  $$\begin{aligned} a &= (3k+1)((3k+1)^2 - 4) \\ &= (3k+1)((9k^2 + 6k + 1) - 4) \\ &= (3k+1)(9k^2 + 6k - 3) \\ &= (3k+1)(3(3k^2 + 2k - 1)) \end{aligned}$$
  a est donc un multiple de 3.
- Si $n = 3k + 2$:
  $$\begin{aligned} a &= (3k+2)((3k+2)^2 - 4) \\ &= (3k+2)((9k^2 + 12k + 4) - 4) \\ &= (3k+1)(9k^2 12k) = 3(3k+1)(3k^2 + 4) \\ &= (3k+1)(3(3k^2 + 2k - 1)) \\ &= 3(3k+1)(3k^2 + 2k - 1) \end{aligned}$$
  a est donc un multiple de 3.

Conclusion : Pour tout $n \in N$, on a montré que, $a = n(n^2 - 4)$ est un multiple de 3.
Corrigé de l'exercice 5
les valeurs de x sont :
$$\begin{aligned} 18 \equiv x[7] \quad &\Longrightarrow \quad x = 4, \\ -2 \equiv x[7] \quad &\Longrightarrow \quad x = 5, \\ -12 \equiv x[7] \quad &\Longrightarrow \quad x = 2, \\ 73 \equiv x[7] \quad &\Longrightarrow \quad x = 3. \end{aligned}$$