Evaluation de cours : Nombres complexes (1ère partie)

Nom : .... Prénom : .... Classe : Terminale Expert

– Calculatrice autorisée – 3 octobre 2024

Exercice 1 — 2 points

Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer, en détaillant le binôme de Newton, la forme algébrique de $(1 - \mathrm{i})^5$

Exercice 2 — 5 points

On pose $z = 2 + i$ et $z' = 3 - 2i$.
Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 4z - 3iz'$
2) $z_2 = z \times z'$
3) $z_3 = \dfrac{z}{z'}$
4) $z_4 = \overline{z}^2$

Exercice 3 — 5 points

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $3z + 1 - 2i = 4 - 3i - 2z$
2) $(3z - 2 + 5i)(iz + 2i - 3) = 0$
3) $-2\overline{z} + (3 + i)z = 3 - 3i$.

Exercice 4 — 4 points

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $4z^2 - 4z + 5 = 0$
2) $z^2 + 21 = 9$

Exercice 5 — 4 points

Soit z un nombre complexe différent de i. On pose $Z = \dfrac{z + i}{z - i}$.

1) Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$.
2) En déduire tous les nombres complexes z tels que Z soit réel.

Evaluation de cours : Nombres complexes (1ère partie)

- Correction -

Corrigé de l'exercice 1

$(1-\mathrm{i})^5 = -4+4\mathrm{i}$

Corrigé de l'exercice 2

1) $z_1 = 4z - 3\mathrm{i}z'$

$$\begin{aligned} z_1 &= 4(2+\mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(3-2\mathrm{i}) \\ &= 8+4\mathrm{i} - 3\mathrm{i}(3-2\mathrm{i}) \\ &= 8+4\mathrm{i} - 9\mathrm{i} + 6\mathrm{i}^2 \\ &= 8+4\mathrm{i} - 9\mathrm{i} - 6 \quad (\text{car } \mathrm{i}^2 = -1) \\ &= 2-5\mathrm{i} \end{aligned}$$

2) $z_2 = z \times z'$

$$\begin{aligned} z_2 &= (2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i}) \\ &= 2\times 3 + 2\times(-2\mathrm{i}) + \mathrm{i}\times 3 + \mathrm{i}\times(-2\mathrm{i}) \\ &= 6-4\mathrm{i}+3\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2 \\ &= 6-4\mathrm{i}+3\mathrm{i}+2 \quad (\text{car } \mathrm{i}^2 = -1) \\ &= 8-\mathrm{i} \end{aligned}$$

3) $z_3 = \dfrac{z}{z'}$

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{2+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}} \\ &= \frac{(2+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{(3-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})} \quad (\text{on multiplie par le conjugué de } z') \\ &= \frac{6+4\mathrm{i}+3\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2}{9-4\mathrm{i}^2} \\ &= \frac{6+7\mathrm{i}-2}{9+4} \quad (\text{car } \mathrm{i}^2 = -1) \\ &= \frac{4+7\mathrm{i}}{13} \\ &= \frac{4}{13} + \frac{7}{13}\mathrm{i} \end{aligned}$$

4) $z_4 = \overline{z}^2$

$$\begin{aligned} \overline{z} &= 2-\mathrm{i} \\ z_4 &= (2-\mathrm{i})^2 \\ &= 2^2 - 2\times 2\times \mathrm{i} + (-\mathrm{i})^2 \\ &= 4-4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2 \\ &= 4-4\mathrm{i}-1 \quad (\text{car } \mathrm{i}^2 = -1) \\ &= 3-4\mathrm{i} \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 3

1) $3z + 1 - 2\mathrm{i} = 4 - 3\mathrm{i} - 2z$

$$\begin{aligned}3z + 1 - 2\mathrm{i} &= 4 - 3\mathrm{i} - 2z\\3z + 2z &= 4 - 1 + 2\mathrm{i} - 3\mathrm{i}\\5z &= 3 - \mathrm{i}\\z &= \frac{3 - \mathrm{i}}{5}\\z &= \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{i}\end{aligned}$$

2) $(3z - 2 + 5\mathrm{i})(\mathrm{i}z + 2\mathrm{i} - 3) = 0$

Soit $3z - 2 + 5\mathrm{i} = 0$, soit $\mathrm{i}z + 2\mathrm{i} - 3 = 0$.

- Résolvons $3z - 2 + 5\mathrm{i} = 0$:

$$\begin{aligned}3z &= 2 - 5\mathrm{i}\\z &= \frac{2 - 5\mathrm{i}}{3}\\z &= \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i}\end{aligned}$$

- Résolvons $\mathrm{i}z + 2\mathrm{i} - 3 = 0$:

$$\begin{aligned}\mathrm{i}z &= 3 - 2\mathrm{i}\\z &= \frac{3 - 2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\\&= \frac{(3 - 2\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}\\&= \frac{-3\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2}{1}\\&= -3\mathrm{i} - 2\\z &= -2 - 3\mathrm{i}\end{aligned}$$

Les solutions sont donc $z = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\mathrm{i}$ ou $z = -2 - 3\mathrm{i}$.

3) $-2\overline{z} + (3 + \mathrm{i})z = 3 - 3\mathrm{i}$

Soit $z = x + y\mathrm{i}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
Alors $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$.
L'équation devient :

$$\begin{aligned}-2(x - y\mathrm{i}) + (3 + \mathrm{i})(x + y\mathrm{i}) &= 3 - 3\mathrm{i}\\-2x + 2y\mathrm{i} + (3x + 3y\mathrm{i} + x\mathrm{i} - y) &= 3 - 3\mathrm{i}\\-2x + 2y\mathrm{i} + (3x - y + (3y + x)\mathrm{i}) &= 3 - 3\mathrm{i}\end{aligned}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\text{Partie réelle :}\quad -2x + 3x - y &= 3\\x - y &= 3 \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Partie imaginaire :}\quad 2y + 3y + x &= -3\\5y + x &= -3 \quad (2)\end{aligned}$$

Résolvons le système :

- À partir de (1) : $x = y + 3$ - Remplaçons x dans (2) :

$$\begin{aligned} 5y + (y + 3) &= -3 \\ 6y + 3 &= -3 \\ 6y &= -6 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

- En remplaçant $y = -1$ dans (1) :

$$\begin{aligned} x - (-1) &= 3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi, la solution est $z = 2 - \mathrm{i}$.

Corrigé de l'exercice 4

1) $4z^2 - 4z + 5 = 0$

Cette équation est une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 4$, $b = -4$ et $c = 5$. Le discriminant est donné par :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 5 = 16 - 80 = -64 = (8\mathrm{i})^2$$

Comme $\Delta < 0$, les solutions sont complexes. Les solutions sont données par la formule :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{4 - 8\mathrm{i}}{8} \\ &= \frac{4}{8} - \frac{8\mathrm{i}}{8} \\ &= \frac{1}{2} - \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{4 + 8\mathrm{i}}{8} \\ &= \frac{4}{8} + \frac{8\mathrm{i}}{8} \\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{i} \end{aligned}$$

Les solutions sont donc $z = \frac{1}{2} + \mathrm{i}$ et $z = \frac{1}{2} - \mathrm{i}$.

2) $z^2 + 21 = 9$

Réduisons l'équation :

$$z^2 + 21 = 9 \quad \Rightarrow \quad z^2 = 9 - 21 = -12$$

On cherche donc les solutions de $z^2 = -12 = \left(\sqrt{12}\mathrm{i}\right)^2$.
Les solutions sont :

$$\begin{aligned} z_1 &= -\mathrm{i}\sqrt{12} \\ &= 2\mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \mathrm{i}\sqrt{12} \\ &= -2\mathrm{i}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Les solutions sont donc $z = 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ et $z = -2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

Corrigé de l'exercice 5

1) Exprimer $\overline{Z}$ en fonction de $\overline{z}$.

On a $Z = \frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}$. Pour trouver $\overline{Z}$, on utilise la propriété de la conjugaison $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$:

$$\overline{Z} = \frac{\overline{z + \mathrm{i}}}{\overline{z - \mathrm{i}}} = \frac{\overline{z} - \mathrm{i}}{\overline{z} + \mathrm{i}}$$

Ainsi, $\overline{Z} = \frac{\overline{z} - \mathrm{i}}{\overline{z} + \mathrm{i}}$.

2) En déduire tous les nombres complexes z tels que Z soit réel.
   Pour que Z soit réel, il faut que $\overline{Z} = Z$. Nous avons donc :

$$\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = \frac{\overline{z}-\mathrm{i}}{\overline{z}+\mathrm{i}}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $(z-\mathrm{i})(\overline{z}+\mathrm{i})$ pour éliminer les dénominateurs, nous obtenons :

$$(z+\mathrm{i})(\overline{z}+\mathrm{i}) = (z-\mathrm{i})(\overline{z}-\mathrm{i})$$

Calculons les deux membres :
- À gauche :

$$(z+\mathrm{i})(\overline{z}+\mathrm{i}) = z\overline{z} + z\mathrm{i} + \overline{z}\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = z\overline{z} + (z+\overline{z})\mathrm{i} - 1$$

- À droite :

$$(z-\mathrm{i})(\overline{z}-\mathrm{i}) = z\overline{z} - z\mathrm{i} - \overline{z}\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = z\overline{z} - (z+\overline{z})\mathrm{i} - 1$$

L'équation devient donc :

$$z\overline{z} + (z+\overline{z})\mathrm{i} - 1 = z\overline{z} - (z+\overline{z})\mathrm{i} - 1$$

Ce qui simplifie à :

$$2\mathrm{i}(z+\overline{z}) = 0$$

Donc,

$$z + \overline{z} = 0$$

Ce qui signifie que z est purement imaginaire, c'est-à-dire $z = \alpha\mathrm{i}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Cependant, comme $z \neq \mathrm{i}$ (condition de départ), on exclut le cas $z = \mathrm{i}$. Par conséquent, les nombres complexes z tels que Z soit réel sont de la forme $z = \alpha\mathrm{i}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 1$.