Correction détaillée des évaluations

Correction du Sujet 1

Exercice 1 : Forme algébrique

On doit réécrire les nombres complexes sous la forme $z = a + ib$.

1. $z_1 = \frac{2+i}{3-2i}$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur $3 + 2i$:

$$z_1 = \frac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{6+4i+3i-2}{9+4} = \frac{4+7i}{13} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$$

Ainsi, $z_1 = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}i$.

2. $z_2 = \frac{1+3i}{i-1}$

On multiplie par le conjugué $i + 1$:

$$z_2 = \frac{(1+3i)(-i-1)}{(i-1)(-i-1)} = \frac{-1-3i-i-3}{1+1} = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i$$

Donc, $z_2 = -2 - 2i$.

3. $z_3 = \left(\frac{3-i}{1+i}\right)^3$

Simplifions $\frac{3-i}{1+i}$:

$$z_3 = \left(\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^3 = \left(\frac{3-3i-i-1}{2}\right)^3 = (1-2i)^3$$

Puis développons :

$$(1-2i)^3 = 1^3 - 3(1^2)(2i) + 3(1)(2i)^2 - (2i)^3 = 1 - 6i - 12 - 8i = -11 - 14i$$

Donc, $z_3 = -11 - 14i$.

Exercice 2 : Équations

1. **Équation :** $2iz + z - 3i = 1$
On factorise z :

$$z(2i+1) = 3i+1 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3i+1}{2i+1}$$

Puis on multiplie par le conjugué :

$$z = \frac{(3i+1)(1-2i)}{(2i+1)(1-2i)} = \frac{3i - 6 + i + 2i^2}{5} = \frac{-7+4i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{4}{5}i$$

Donc, la solution est $z = -\frac{7}{5} + \frac{4}{5}i$.
2. **Équation :** $z - \frac{3}{z} = i$
On multiplie par z pour éliminer le dénominateur :

$$z^2 - iz - 3 = 0$$

On résout cette équation quadratique avec la formule du discriminant :

$$\Delta = (-i)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = -1 + 12 = 11$$

Les solutions sont :

$$z = \frac{i \pm \sqrt{11}}{2}$$

3. **Équation :** $3z - 4\bar{z} = i$
On écrit $z = x + yi$ et $\bar{z} = x - yi$. En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient deux équations :

$$3x - 4x = 0 \quad \text{et} \quad 3y + 4y = 1$$

En résolvant, on trouve $y = \frac{1}{7}$, donc la solution est $z = 0 + \frac{1}{7}i$.

Exercice 3 : Binôme de Newton

Développons l'expression $(1+i)^4$ avec le binôme de Newton :

$$(1+i)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (1)^{4-k} (i)^k$$

Pour chaque terme :

$$1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -5$$

Ainsi, $(1+i)^4 = -5$.

Correction du Sujet 2

Exercice 1 : Forme algébrique

Les méthodes sont similaires à celles du Sujet 1.

Exercice 2 : Équations

1. **Équation :** $iz + 2 - i = z + 4i$
On factorise et simplifie comme dans le Sujet 1.
2. **Équation :** $2z - \frac{i}{z} = 2 + 3i$
Multiplier par z donne une équation quadratique.
3. **Équation :** $z - \bar{z} = 5 + 3i$
On résout en écrivant $z = x + yi$.

Exercice 3 : Binôme de Newton

Développons $(1 + 2i)^3$:

$$(1 + 2i)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (1)^{3-k} (2i)^k$$

En calculant chaque terme, on obtient :

$$(1 + 2i)^3 = -11 - 2i$$

Correction du Sujet 3

Exercice 1 : Forme algébrique

Les calculs sont similaires à ceux des sujets précédents.

Exercice 2 : Équations

Les résolutions suivent les mêmes principes que pour les autres sujets.

Exercice 3 : Binôme de Newton

Développons $(2+i)^3$:

$$(2+i)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (2)^{3-k} (i)^k$$

En calculant chaque terme, on obtient :

$$(2+i)^3 = 2 + 11i$$