Exercice 1 : Partie A :

1) $D'_p = [-3;4]$ p est dérivable sur $[-3;4]$ comme polynôme de degré 3.

$p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$ 0,25 $a = 3$, $b = -6$ et $c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 5 = 36 - 60 = -24$

$\Delta < 0$ donc le polynôme n'admet pas de racine réelle.

$a = 3 > 0$

x	-3		4
signe de $p'(x)$		$+$	
variations de p	-68	$\nearrow$	37

0,25 0,25 0,75

$p(-3) = (-3)^3 - 3 \times (-3)^2 + 5 \times (-3) + 1$
$= -27 - 27 - 15 + 1$
$= -68$

$p(4) = 4^3 - 3 \times 4^2 + 5 \times 4 + 1$
$= 64 - 48 + 20 + 1$
$= 37$

2) Sur $[-3;4]$, p est continue (car dérivable) et est strictement croissante 0,25. Or $0 \in [-68;37]$ 0,25 donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires 0,25, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3;4]$. 0,75

3) À l'aide de la calculatrice, on a $\alpha \simeq -0,2$ au dixième près. 0,5

4) On en déduit le tableau de signes de p sur $[-3;4]$:

x	-3		α		4
signe de $p(x)$		$-$	0	$+$	

0,25 0,25 0,5

Partie B :

1)a) $D'_f = [-3;4]$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[-3;4]$ et $1 + x^2 > 0$ donc $1 + x^2 \neq 0$ sur $[-3;4]$

$u(x) = e^x$ $\quad v(x) = 1 + x^2$
$u'(x) = e^x$ $\quad v'(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{e^x(1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1+x^2)^2}$$

0,25 0,25 0,5

b) $f'(1) = \dfrac{e(1^2 - 2 + 1)}{(1+1)^2} = \dfrac{e \times 0}{4} = 0$ 0,25 0,25 donc la courbe C_f admet bien une tangente horizontale au point d'abscisse 1. 0,5

2) a) D'après le graphique, la fonction f semble convexe sur $[-4;0]$, puis concave sur $[0;1]$ puis convexe sur $[1;4]$

Donc C_f admettrait deux points d'inflexion en $x=0$ et $x=1$ 0,25

Donc le toboggan semble assurer de bonnes sensations 0,25 0,5

b) $D''_f = [-3;4]$, $f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$

$\forall x \in [-3;4]$, $e^x > 0$

et $x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^2+1 \geqslant 1$ soit $x^2+1>0$

donc $(x^2+1)^3 > 0$

Donc le signe de $f''(x)$ dépend du signe de $p(x)(x-1)$.

$x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$. 0,25

x	-3		α		1		4
signe de $p(x)$		$-$	0		$+$		
signe de $x-1$			$-$		0	$+$	
signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		convexe		concave		convexe	

0,25 0,25 1,25

$f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x=\alpha$ et $x=1$ 0,25

Donc C_f possède deux points d'inflexion ainsi le toboggan assure de bonnes sensations. 0,25

Exercice 2 :

1) $D'_f = \mathbb{R}$ comme fonction polynôme de degré 2.

$f'(x) = \dfrac{3}{4} \times 2x - 2 = \dfrac{3}{2}x - 2$ 0,25

$\dfrac{3}{2}x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}x \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant 2 \times \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{4}{3}$ 0,75

x	$-\infty$		$4/3$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

0,25

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{4}x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{4}x^2 = +\infty$ 0,25

$f\left(\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 - 2 \times \dfrac{4}{3} + 3 = \dfrac{4}{3} - \dfrac{8}{3} + \dfrac{9}{3} = \dfrac{5}{3}$

3) $f(x) - x = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3 - x = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$

$= \frac{3}{4}\left(x^2 - 3 \times \frac{4}{3}x + 3 \times \frac{4}{3}\right)$

$= \frac{3}{4}(x^2 - 4x + 4)$ 0,25

$= \frac{3}{4}(x-2)^2$

0,5

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-2)^2 \geqslant 0$ et $\frac{3}{4} > 0$ donc par produit $\frac{3}{4}(x-2)^2 \geqslant 0$ 0,25

soit $f(x) - x \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant x$.

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

ici $\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.

a) Initialisation : pour $n = 0$

$\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$ et $u_1 = f(u_0)$

or d'après la question 3, pour tout $x \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$, $f(x) \geqslant x$.

et d'après la question 2, pour tout $x \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$, $\frac{4}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2$.

ainsi on a $\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$, $u_1 \geqslant u_0$ et $\frac{4}{3} \leqslant u_1 \leqslant 2$. 0,25

Soit $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$. L'inégalité est vérifiée donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : hypothèse de récurrence : On suppose que la propriété est vraie pour un entier $n \geqslant 0$, soit, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. 0,75

Démontrons que la propriété est aussi vraie au rang suivant $n+1$, soit, $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$. 0,25 avec conclusion

D'après l'hypothèse de récurrence : $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ et $\frac{4}{3} \leqslant u_0$

or sur $\left[\frac{4}{3} ; 2\right]$, la fonction f est croissante donc l'ordre est conservé.

0,25

(*) 2) si $\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2$ or sur $\left[\frac{4}{3} ; 2\right]$, f est croissante 0,25

alors $f\left(\frac{4}{3}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$ donc l'ordre est conservée

or $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{4}{3} + 3 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{9}{3} = \frac{5}{3}$ 0,5

et $f(2) = \frac{3}{4} \times 2^2 - 2 \times 2 + 3 = 3 - 4 + 3 = 2$

Donc $\frac{5}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2$ or $\frac{4}{3} \leqslant \frac{5}{3}$ d'où $\frac{4}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2$.

0,25

ainsi $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$

avec $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(2) = \frac{3}{4} \times 2^2 - 2 \times 2 + 3 = 3 - 4 + 3 = 2$

Donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$. La propriété est héréditaire.

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc par récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

b) La suite est croissante (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$) et est majorée par 2 (car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 2$) donc d'après le théorème de convergence des suites monotones elle converge. 0,25 0,25 0,5

c) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ 0,25 (car dérivable sur $\mathbb{R}$).

Et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc d'après le théorème 0,25 du point fixe, la limite ℓ de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$. 0,75

$f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff \frac{3}{4}(x-2)^2 = 0 \iff x = 2$ 0,25

et $2 \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$.

Ainsi $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$.

5) Ici $u_0 = 3$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

```
def seuil () :
    u = 3
    n = 0
    while u < 100
        u = 3*u*u/4 - 2*u + 3   ou (3/4)*u*2 - 2*u + 3
        n = n + 1
    Return n
```

0,5

6) Ici $u_0 > 2$.

Raisonnement par l'absurde : On suppose que (u_n) est convergente vers un réel ℓ. 0,5

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant f(x)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant f(u_n)$

soit $u_n \leqslant u_{n+1}$. Donc la suite (u_n) est croissante.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ soit $\ell \geqslant u_0$. 0,75

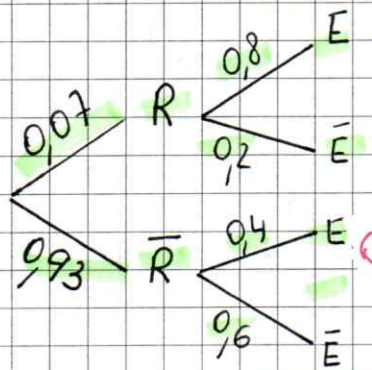
Or si la suite converge, d'après la question c), on a vu que la seule limite possible est $\ell = 2$.

Mais $u_0 > 2$ et $\ell = 2$ donc l'inégalité $\ell \geqslant u_0$ est fausse. 0,25

L'hypothèse de départ "on suppose que (u_n) est convergente" est fausse. Donc dans le cas où $u_0 > 2$, la suite (u_n) n'est donc pas convergente. 0,25

Exercice 3 Partie A

1)



0,75

$P(R \cap E) = P(R) \times P_R(E)$
$= 0,07 \times 0,8$
$= 0,056$ 0,25

2) D'après la loi des probabilités totales 0,25

$P(E) = P(R \cap E) + P(\bar{R} \cap E)$ 0,25
$= P(R) \times P_R(E) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(E)$ 0,75
$= 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,4$ 0,25
$= 0,428$

3) $P_E(R) = \dfrac{P(R \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0,056}{0,428} \simeq 0,131$ 0,25 0,75
0,25 0,25 au millième près

Partie B

1) On répète 30 fois, de manière identique et indépendante, une expérience aléatoire avec exactement deux issues. 0,25 1

X compte le nombre d'objets rares que le joueur obtient.

Donc X suit la loi binomiale 0,25 de paramètres $n = 30$ et $p = 0,07$ 0,25

$E(X) = np = 30 \times 0,07 = 2,1$ 0,25

2) A l'aide de la calculatrice, on obtient
$P(X \leqslant 5) \simeq 0,984$ au millième près. 0,25

3) On cherche $P(X \geq k) \geq 0,5$.

A l'aide de la calculatrice, on obtient : $k = 2$ 0,5

Cela signifie que la probabilité d'avoir au moins 2 objets rares, après avoir remporté 30 défis, est supérieure ou égale à 0,5. 0,25 0,75

4) Soit Y, la variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,07$.

On cherche à résoudre :

$P(X \geq 1) \geq 0,95$ 0,25

$\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,95$

$\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} 0,07^0 \, 0,93^n \geq 0,95$

$\Leftrightarrow 1 - 0,93^n \geq 0,95$ 0,25

$\Leftrightarrow -0,93^n \geq -0,05$

$\Leftrightarrow 0,93^n \leq 0,05$

0,75

A l'aide de la calculatrice, on obtient $n = 42$ au minimum. 0,25

Exercice 4

1) $\vec{u_{d_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d_1)

$\vec{u_{d_2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d_2) 0,25

$k_1 = \frac{-1}{1} = -1$ et $k_2 = \frac{1}{1} = 1$. $k_1 \neq k_2$. Les coordonnées de $\vec{u_{d_1}}$ et $\vec{u_{d_2}}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\vec{u_{d_1}}$ et $\vec{u_{d_2}}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi les droites (d_1) et (d_2) sont soit sécantes soit non coplanaires. 0,25

On cherche à savoir s'il existe un point d'intersection entre (d_1) et (d_2), pour cela on cherche à résoudre :

$$\begin{cases} 2 + k = 1 - s \\ 1 + k = -1 + s \\ -k = 2 - s \end{cases} \text{0,25} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + s - 2 = 1 - s \\ 1 + s - 2 = -1 + s \\ k = s - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s = 1 \\ -1 = -1 \\ k = s - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 1/2 \\ -1 = -1 \\ k = \frac{1}{2} - 2 = -3/2 \end{cases}$$ 0,25

le système admet une solution pour $s = \frac{1}{2}$ et $k = -\frac{3}{2}$ 0,5 (4)

Donc les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes en un point

$$\begin{cases} x = 2 - 3/2 = 0,5 \\ y = 1 - 3/2 = -0,5 \\ z = 1,5 \end{cases}$$

de coordonnées $(0,5 ; -0,5 ; 1,5)$ 0,25 (1,75)

Elles sont donc coplanaires 0,25. L'affirmation est FAUSSE. 0,25

2) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}6\\4\\0\end{pmatrix}$ 0,25 $\vec{AD}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$

$k_1 = \frac{6}{3} = 2$ et $k_2 = \frac{4}{3}$. $k_1 \neq k_2$.
Les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

On cherche à résoudre (avec x et y deux nombres réels)

$\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ 0,25 (1,25)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3x + 6y \\ 2 = 3x + 4y \\ 4 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3 + 6y \\ 2 = 3 + 4y \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-3}{6} = -\frac{2}{6} \\ y = \frac{2-3}{4} = -\frac{1}{4} \\ x = 1 \end{cases}$$ 0,25

Impossible. le système n'admet pas de solution. 0,25

Donc les vecteurs $\vec{AD}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas coplanaires donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

L'affirmation est FAUSSE. 0,25

3) On cherche à résoudre : (0,75)

$$\begin{cases} 2 = 1 + 2t \\ 1 = -2 + t \\ -1 = 4 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2-1}{2} = 1/2 \\ t = 1 + 2 = 3 \\ t = \frac{-1-4}{-1} = 5 \end{cases}$$ 0,25

Impossible. le système n'admet pas de solution. 0,25

Donc le point $M(2 ; 1 ; -1) \notin (\Delta)$. L'affirmation est FAUSSE. 0,25

4) $\vec{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (AB).

$\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires donc $\vec{u}$ est également un vecteur directeur de (AB) 0,25

$A \in (AB)$, on obtient ainsi une représentation paramétrique de (AB) :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$ où $t \in \mathbb{R}$. 0,25

Il reste à vérifier si le point de coordonnées $(2;3;1) \in (AB)$.
On cherche alors à résoudre :

$$\begin{cases} 2 = 2t \\ 3 = 4 - t \\ 1 = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3-4}{-1} = 1 \\ t = \frac{1+1}{2} = 1 \end{cases}$$

0,25

le système admet une solution pour $t = 1$ donc le point de coordonnées $(2;3;1) \in (AB)$ 0,25

Donc une représentation paramétrique de (AB) est :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

L'affirmation est VRAIE. 0,25

1,25

(a) On cherche à vérifier si les points A et B appartiennent à la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3 - t \\ z = 1+2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Pour savoir si le point A appartient à cette droite, on cherche à résoudre

$$\begin{cases} 0 = 2 + 2t \\ 4 = 3 - t \\ -1 = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2/2 = -1 \\ t = \frac{4-3}{-1} = -1 \\ t = \frac{-1-1}{2} = -1 \end{cases}$$

0,25

Le système admet une solution pour $t = -1$ donc le point A appartient à cette droite.

0,25

Pour savoir si le point B appartient à cette droite, on cherche à résoudre :

$$\begin{cases} 6 = 2 + 2t \\ 1 = 3 - t \\ 5 = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{6-2}{2} = 2 \\ t = \frac{1-3}{-1} = 2 \\ t = \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

0,25

Le système admet une solution pour $t = 2$ donc le point B appartient également à cette droite.

0,25

VRAIE

0,25