CORRECTION BAC BLANC N°1 : SUJET 1

Exercice 1 :

Partie A :

justification non demandée

1). Sur $]-\infty ; 0{,}4]$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante
- Sur $[0{,}4 ; 2{,}6]$, $f'(x) \leqslant 0$ donc f est décroissante
- et sur $[2{,}6 ; +\infty[$, $f'(x) \geqslant 0$ donc f est croissante

x	$-\infty$		$0{,}4$		$2{,}6$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
variations de f		↗		↘		↗	

0,25

2). Sur $]-\infty ; -1]$, f' est croissante donc f est convexe 0,25
(Sur $[-1 ; 2]$, f' est décroissante donc f est concave)
- et sur $[2 ; +\infty[$, f' est croissante donc f est convexe

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
variations de f'		↗		↘		↗	
f		convexe		concave		convexe	

Partie B :

1) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 5x + 6 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ 0,25
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. 0,25 / 0,5

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 5x + 6)e^x = \text{F.I}$ ("$\infty \times 0$")

$\lim\limits_{x -\infty} f(x) = \lim\limits_{x -\infty} x^2 e^x - 5xe^x + 6e^x$ 0,25

or $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0$ (par croissances comparées)
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ donc par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} -5xe^x = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} 6e^x = 0$

donc par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 0,25

0,5

2) $D'_f = \mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = u(x) \times v(x)$ $\qquad u(x) = x^2 - 5x + 6 \qquad v(x) = e^x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad u'(x) = 2x - 5 \qquad v'(x) = e^x$

$f'(x) = (2x-5)e^x + (x^2-5x+6)e^x$ 0,25

$\quad = (2x - 5 + x^2 - 5x + 6)e^x$

$\quad = (x^2 - 3x + 1)e^x$ ■ $\qquad$ 0,25

3). $a = 1$, $b = -3$ et $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9 - 4 = 5$

$\Delta > 0$ donc le polynôme $x^2 - 3x + 1$ admet deux racines réelles.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0{,}38$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2{,}62$

. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ dépend du signe de $x^2 - 3x + 1$.

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
signe de e^x				+			
signe de x^2-3x+1		+	0	−	0	+	
signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
variations de f	0	↗	$f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$	↘	$f\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$	↗	$+\infty$

0,25 $\quad$ 0,25 $\quad$ 0,25 $\quad$ 0,75

4) $f\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \simeq 6{,}2$ et $f\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \simeq -3{,}2$

. Sur $\left]-\infty ; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$, les images sont comprises entre $f\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \simeq -3{,}2$ et $f\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \simeq 6{,}2$ donc l'équation $f(x) = 10$ n'admet aucune solution. 0,25

. Sur $\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right[$, f est continue (car dérivable) et est strictement croissante, or $10 \in \left[f\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) ; +\infty\right[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution sur cet intervalle. 0,25 $\quad$ 1

. <u>Conclusion</u> : Sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution α. 0,25 D'après la calculatrice, on a $\alpha \simeq 3{,}29$ à 10^{-2} près 0,25

5) $T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$f'(0) = 1 \times e^0 = 1$ et $f(0) = 6 \times e^0 = 6$ 0,25

d'où $T_0 : y = x + 6$. 0,25

6) a) $D''_f = \mathbb{R}$ et $f''(x) = (x+1)(x-2)e^x$

$x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$

$x - 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $f''(x)$ dépend du signe de $(x+1)(x-2)$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
signe de $x+1$	$-$	0	$+$		
signe de $x-2$			$-$	0	$+$
signe de e^x			$+$		
signe de $f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	convexe		concave		convexe

0,25 0,25 0,25 0,75

sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[2 ; +\infty[$, $f''(x) \geqslant 0$ donc f est convexe

et sur $[-1 ; 2]$, $f''(x) \leqslant 0$ donc f est concave. 0,5

b) Sur $[-1 ; 2]$, f est concave donc la courbe représentative de f est en dessous de toutes ses tangentes sur cet intervalle 0,25

or $0 \in [-1 ; 2]$ donc $f(x) \leqslant T_0$ soit $f(x) \leqslant x + 6$. 0,25

en particulier en $x = 0$

Exercice 2 :

Partie A

$$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \end{cases}$$ pour tout entier naturel n

Soit $f(x) = 2x(1-x)$ définie sur $D_f = \mathbb{R}$

et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) $D'_f = \mathbb{R}$. f est un polynôme de degré 2 donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$f(x) = 2x(1-x) = 2x - 2x^2$

d'où $f'(x) = 2 - 4x$. 0,25

$2 - 4x \geq 0 \iff -4x \geq -2 \iff x \leq \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
variations de f	$\nearrow$		$\searrow$

0,25

0,25

0,75

Sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante

Ainsi sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, f est croissante.

2) • $u_1 = 2u_0(1 - u_0) = 2 \times 0,3(1 - 0,3) = 0,6 \times 0,7$

soit $u_1 = 0,42$. 0,25

• Initialisation : Pour $n = 0$:

1

$u_0 = 0,3$ et $u_1 = 0,42$. On a $u_0 \leq u_1$.

L'inégalité est vérifiée donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : hypothèse de récurrence : On suppose que la propriété est vraie pour un entier $n \geq 0$, soit, $u_n \leq u_{n+1}$.

Démontrons que la propriété est aussi vraie au rang suivant, soit, $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. 0,25

D'après l'hypothèse de récurrence :

$u_n \leq u_{n+1}$ or $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ soit $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

et sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, la fonction f est croissante donc l'ordre est conservé 0,25

soit $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$

donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$. La propriété est donc héréditaire

Conclusion : La propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc par récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$ 0,25 avec init

soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

3) La suite (u_n) est croissante 0,25 (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$)

et est majorée par $\frac{1}{2}$ (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1}{2}$) 0,25

0,5

donc d'après le théorème de convergence des suites monotones la suite (u_n) est convergente.

4) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable) (3)

et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n \in [0 ; 1/2]$ donc, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$. 0,25

$$f(x) = x \iff 2x - 2x^2 = x$$
$$\iff x - 2x^2 = 0$$
$$\iff x(1 - 2x) = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } 1 - 2x = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

0,25 — 0,75

Or $u_0 = 0,3$ et la suite (u_n) est croissante donc $\ell \geqslant 0,3$.

Ainsi $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$. 0,25

Partie B

1) Ici $b = 0$,

a) Soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0 \times P_n)$

$$\iff P_{n+1} = P_n + P_n$$
$$\iff P_{n+1} = 2P_n$$

0,25 — 0,5

Donc P_n est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $P_0 = 3$. 0,25

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 q^n = 3 \times 2^n$

$q = 2 > 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ et par produit $\lim_{n \to +\infty} P_n = +\infty$. 0,25 — 0,25

2) $b = 0,2$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0,1 P_n$

$v_0 = 0,1 \times P_0 = 0,1 \times 3 = 0,3$ 0,25

$v_{n+1} = 0,1 P_{n+1}$ or $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2 P_n)$

$$\iff P_{n+1} = P_n + P_n - 0,2 P_n^2$$
$$\iff P_{n+1} = 2P_n - 0,2 P_n^2$$

Ainsi $v_{n+1} = 0{,}1\left(2P_n - 0{,}2P_n^2\right)$ 0,25

or $v_n = 0{,}1 \times P_n \iff P_n = \dfrac{v_n}{0{,}1}$

Soit $v_{n+1} = 0{,}1\left(2 \times \dfrac{v_n}{0{,}1} - 0{,}2\left(\dfrac{v_n}{0{,}1}\right)^2\right)$ 0,75

$= 2v_n - 0{,}2 \times \dfrac{v_n^2}{0{,}1}$ 0,25

$= 2v_n - 2v_n^2$

Soit $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n(1-v_n)$ et $v_0 = 0{,}3$

donc la suite (v_n) correspond à la suite (u_n) de la partie A.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$ 0,25

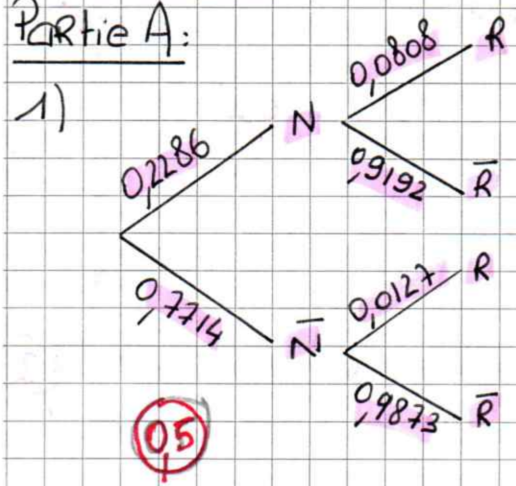
et par quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n}{0{,}1} = 5$ 0,5

Donc dans ce modèle, au bout d'un certain nombre d'années, la population se stabilisera autour de 5000 individus. 0,25

Exercice 3

Partie A :

1)



2) $P(N \cap R) = P(N) \times P_N(R)$ 0,25

$= 0{,}2286 \times 0{,}0808$ 0,5

$\simeq 0{,}0185$ au dix-millième près 0,25

3) D'après la loi des probabilités totales. 0,25

$P(R) = P(N \cap R) + P(\bar{N} \cap R)$ 0,25 0,75

$= P(N) \times P_N(R) + P(\bar{N}) \times P_{\bar{N}}(R)$

$= 0{,}2286 \times 0{,}0808 + 0{,}7714 \times 0{,}0127$ 0,25

Soit $P(R) \simeq 0{,}0283$ au dix-millième près

4) $P_R(N) = \dfrac{P(N \cap R)}{P(R)} \simeq \dfrac{0{,}0185}{0{,}0283} \simeq 0{,}6537$ 0,25 0,25 0,25

ou $\dfrac{0{,}2286 \times 0{,}0808}{0{,}2286 \times 0{,}0808 + 0{,}7714 \times 0{,}0127} \simeq 0{,}6534$ 0,75

Partie B (4)

1) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,65$ 0,25

2) D'après la calculatrice, $P(X = 325) \simeq 0,0374$ à 10^{-4} près 0,25 0,25 0,5

3) $P(X \geqslant 325) \simeq 0,5206$ à 10^{-4} près. 0,25

La probabilité pour qu'au moins 325 véhicules soient neufs parmi les 500 véhicules hybrides rechargeables, est d'environ 0,5206 soit 52,06 %. 0,25 0,5

Partie C

1) Soit Y la variable aléatoire qui donne le nombre de véhicules neuf parmi les n véhicules.

On répète n fois de manière identique et indépendante une expérience aléatoire avec exactement 2 issues. Donc Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,65$

$P_n = P(Y = 0) = \binom{n}{0} 0,65^0 (1 - 0,65)^n = 1 \times 1 \times 0,35^n$ 0,25 0,5

soit $P_n = 0,35^n$ 0,25

2) $q_n = P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - 0,35^n$ 0,25

On cherche à résoudre l'inéquation

$1 - 0,35^n \geqslant 0,9999$ 0,25

$\Leftrightarrow -0,35^n \geqslant -0,0001$ 0,75

$\Leftrightarrow 0,35^n \leqslant 0,0001$

Soit à l'aide de calculatrice, on obtient $n = 9$ au minimum 0,25

Exercice 4 :

On cherche à savoir si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coli

Supposons qu'il existe un réel k tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$

1) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$

$k_1 = \frac{2}{-2} = -1$, $k_2 = \frac{4}{4} = 1$

$k_1 \neq k_2$. Les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires

donc ils forment une base du plan

A, B, C et D sont coplanaires s'il existe 0,25

On cherche à résoudre (avec deux x et y deux nombres réels) tq

$\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ 0,25

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -2x + 2y \\ 0 = 4x + 4y \\ 4 = 3x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -2x - 2x \\ x = -y \\ 4 = 3x - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \\ x = -y \\ x = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$ 0,25

Impossible. Le système n'admet pas de solution. Donc les vecteurs $\vec{AD}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas coplanaires 0,25 donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

l'affirmation est FAUSSE. 0,25 1,25

2) $\vec{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (AB)

0,25

$\vec{u} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ $\vec{u}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires donc $\vec{u}$ est également un vecteur directeur de (AB).

Donc avec $A \in (AB)$, on obtient une représentation paramétrique de (AB) :
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

0,25

Reste à vérifier si le point de coordonnées $(2;3;1) \in (AB)$.

On cherche à résoudre :
$$\begin{cases} 2 = 2t \\ 3 = 4 - t \\ 1 = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3-4}{-1} = 1 \\ t = \frac{1+1}{2} = 1 \end{cases}$$

0,25

Le système admet une solution pour $t = 1$ donc le point de coordonnées $(2;3;1)$ appartient à la droite (AB) 0,25

donc une représentation paramétrique de (AB) est
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$
L'affirmation est Vraie. 0,25

ou) On cherche à vérifier si les points A et B appartiennent à la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Pour savoir si le point A appartient à cette droite, on cherche à résoudre :
$$\begin{cases} 0 = 2 + 2t \\ 4 = 3 - t \\ -1 = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2/2 = -1 \\ t = \frac{4-3}{-1} = -1 \\ t = \frac{-1-1}{2} = -1 \end{cases}$$

0,25

Le système admet une solution pour $t = -1$ donc le point A appartient à cette droite

0,25

Pour savoir si le point B appartient à cette droite, on cherche à résoudre :

$$\begin{cases} 6 = 2+2t \\ 1 = 3-t \\ 5 = 1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{6-2}{2} \\ t = \frac{1-3}{-1} \\ t = \frac{5-1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 2 \end{cases}$$

0,25

Le système admet une solution pour $t = 2$ donc B appartient également à cette droite. 0,25

VRAIE 0,25

1,25

3) $\vec{u}_d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $(\mathcal{D})$

$\vec{u}_{d'} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $(\mathcal{D}')$ 0,25

$k_1 = \frac{2}{1}$ et $k_2 = \frac{-1}{1} = -1$, $k_1 \neq k_2$, les coordonnées de $\vec{u}_d$ et $\vec{u}_{d'}$ ne sont pas proportionnelles, donc les vecteur $\vec{u}_d$ et $\vec{u}_{d'}$ ne sont pas colinéaires. 0,25 Ainsi les droites sont soit sécantes soit non coplanaires.

On cherche à savoir s'il existe un point d'intersection entre $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$, pour cela on cherche à résoudre :

$$\begin{cases} 3+t = 2t' \\ 1+t = 4-t' \\ 2+t = -1+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2t'-3 \\ 1+2t'-3 = 4-t' \\ 2+2t'-3 = -1+2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2t'-3 \\ 3t' = 6 \\ -1 = -1 \end{cases}$$

0,25

$$\iff \begin{cases} t = 2\times 2 - 3 = 1 \\ t' = 2 \\ -1 = -1 \end{cases}$$

0,25

le système admet une solution pour $t = 1$ et $t' = 2$.

1,75

Donc les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont sécantes en un point 0,25

$$\begin{cases} x = 3+1 = 4 \\ y = 1+1 = 2 \\ z = 2+1 = 3 \end{cases}$$ de coordonnées $(4;2;3)$

elles sont donc coplanaires 0,25. L'affirmation est FAUSSE. 0,25

4) On cherche à résoudre : Vérifions s'il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} 11 = -4+3t \\ -9 = 6-3t \\ -22 = 8-6t \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{11+4}{3} = 5 \\ t = \frac{-9-6}{-3} = 5 \\ t = \frac{-22-8}{-6} = 5 \end{cases}$$

0,25

Le système admet une solution pour $t = 5$ donc le point 0,25 $M(11;-9;-22)$ appartient à la droite $(\mathcal{D})$.

L'affirmation est VRAIE. 0,25

0,75