BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE BLANCHE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION JANVIER 2025

SUJET 2

MATHÉMATIQUES

Mercredi 22 janvier 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège »est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte **5 pages** numérotées de 1 à 5.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1

5 points

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

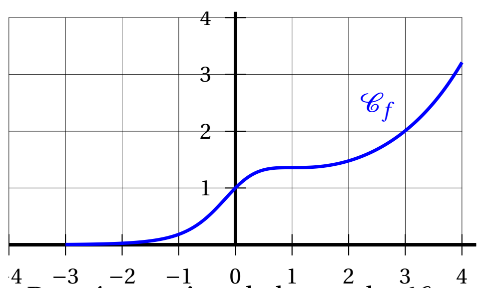
Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

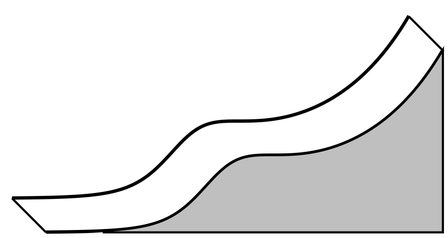
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. **a.** Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
   b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$



Vue de profil du toboggan

   a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
   b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1 + x^2\right)^3}$$

   où p est la fonction définie dans la partie A.
   En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

EXERCICE 2 — 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\,;\,2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}\,;\,2\right]$.

3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leqslant f(x)$.
Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x :

$$f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2.$$

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

On a donc, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3.$$

4. Étude du cas : $\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Prouver que la limite de la suite est égale à 2.

5. Étude du cas particulier : $u_0 = 3$.
On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
Recopier et compléter la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
  u = 3
  n = 0
  while ...
      u = ...
      n = ...
  return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.
À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.

EXERCICE 3

5 points

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

- la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;
- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'évènement « le joueur tire une épée » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires des évènements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Démontrer que la probabilité de tirer une épée est de 0,428.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $P(X \leqslant 5)$. Arrondir le résultat au millième.
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.

   Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à $0,95$.

   Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en uvre puis on résoudra la dernière inéquation à la calculatrice.

EXERCICE 4 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans l'ensemble de l'exercice, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$.

1. On considère les droites (d_1) et (d_2) dont des représentations paramétriques sont respectivement :

$$(d_1)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+r \\ y &=& 1+r \\ z &=& -r \end{array}\right. \quad (r\in\mathbb{R}) \quad \text{et } (d_2)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-s \\ y &=& -1+s \\ z &=& 2-s \end{array}\right. \quad (s\in\mathbb{R})$$

   Affirmation 1 :
   Les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

2. On considère les points $A(1,2,3)$, $B(4,5,7)$, $C(7,6,3)$, $D(2,4,7)$.

   Affirmation 2 :
   Les points A, B, C et D sont coplanaires.

3. La droite (Δ) dont une représentation paramétrique est :

$$(\Delta)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t \\ y &=& -2+t \\ z &=& 4-t \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}.)$$

   Affirmation 3 :
   Le point M$(2\,;\,1\,;\,-1)$ appartient à la droite Δ .

4. On considère les points : $A(0\,;\,4\,;\,-1)$ et $B(6\,;\,1\,;\,5)$.

   Affirmation 4 :
   Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+2t, \\ y &=& 3-t, \\ z &=& 1+2t, \end{array}\right. \qquad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$