BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE BLANCHE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION JANVIER 2025

SUJET 1

MATHÉMATIQUES

Mardi 21 janvier 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège »est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte **5 pages** numérotées de 1 à 5.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

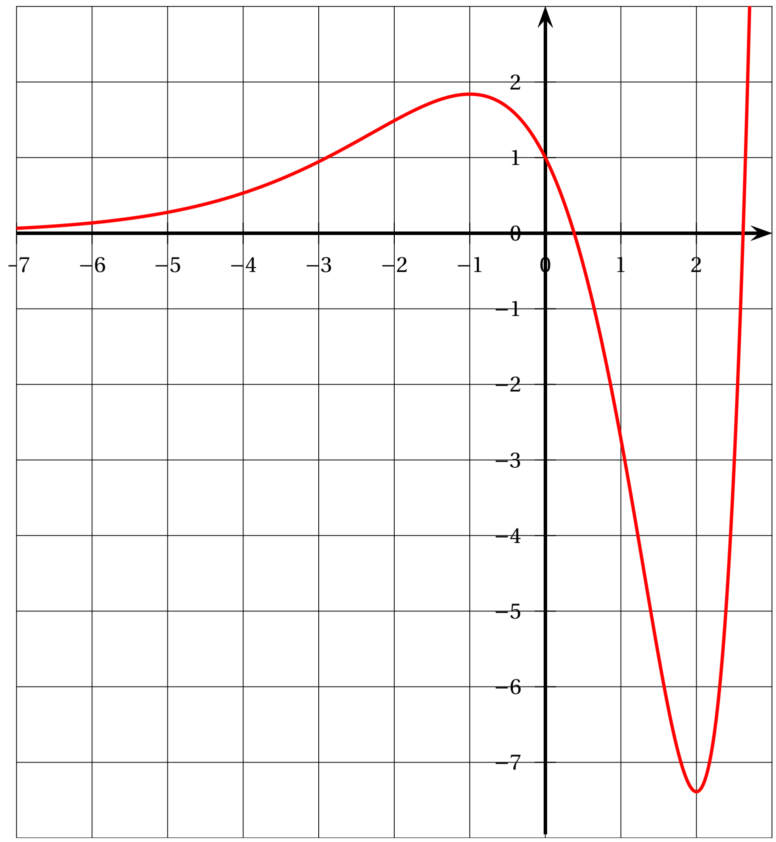
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1 — 5 points

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f'. Aucune justification n'est demandée.

1. Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On utilisera des valeurs approchées si besoin.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B

On admet que la fonction f de la partie **A** est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 6\right)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = \left(x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^x$.
3. En déduire le sens de variation de la fonction f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On donnera sa valeur approchée à 10^{-2} près.
5. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x+1)(x-2)\mathrm{e}^x$.

6. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$, on a $f(x) \leqslant x+6$.

EXERCICE 2 — 5 points

Partie A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n(1-u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1-x).$$

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$.
   Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3 000 individus.
On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022+n$. Ainsi $P_0 = 3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX$^{\text{e}}$ siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.
   a. Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b. Déterminer la limite de P_n.
2. Dans cette question $b = 0,2$.
   a. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0,1 \times P_n$.
   Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n(1-v_n)$.

b. Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

EXERCICE 3 — 5 points

Les données publiées le 1er mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- $22,86\,\%$ des véhicules étaient des véhicules neufs ;
- $8,08\,\%$ des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;
- $1,27\,\%$ des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Partie A

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.
On note :

- N l'évènement « le véhicule est neuf » ;
- R l'évènement « le véhicule est hybride rechargeable » ;
- $\overline{N}$ et $\overline{R}$ les évènements contraires des évènements contraires de N et R.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.
3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,028 3.
4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

Partie B

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022.
Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à $0,65$.
On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.
On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.
3. Déterminer la probabilité $p(X \geq 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.
On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à $0,65$.
On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n que tous ces véhicules soient d'occasion.

2. On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. Déterminer, en résolvant à la calculatrice une inéquation, la plus petite valeur de n telle que $q_n \geqslant 0{,}9999$.

EXERCICE 4 — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$\mathrm{A}(2~;~0~;~0),\qquad \mathrm{B}(0~;~4~;~3),\qquad \mathrm{C}(4~;~4~;~1) \text{ et } \qquad \mathrm{D}(0~;~0~;~4)$$

Affirmation 1 : Les points A, B, C et D sont coplanaires.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}~;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$, on considère les points $\mathrm{A}(0~;~4~;~-1)$ et $\mathrm{B}(6;1;5)$.

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+2t\\ y &=& 3-t\\ z &=& 1+2t\end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$

3. On considère les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathscr{D}\quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 2+t\end{array}\right. \text{ où } t\in\mathbb{R}~;\quad \mathscr{D}'\quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t'\\ y &=& 4-t'\\ z &=& -1+2t'\end{array}\right. \quad \text{où } t'\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas coplanaires.

4. On considère la droite $\mathscr{D}$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathscr{D}\quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4+3t\\ y &=& 6-3t\\ z &=& 8-6t\end{array}\right. \quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : Le point $M(11~;~-9~;~-22)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.