Plan de travail

Orthogonalité et distance dans l'espace

7

Géométrie

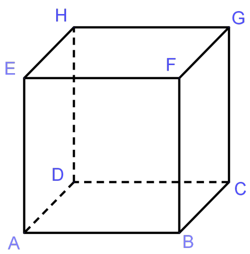
Produit scalaire

Exercice 1

On considère trois points A, B et C tels que $AB = 7$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 14$.
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 2

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1. Calculer les produits scalaires suivants



$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG}$

$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{ED}$ $\qquad$ $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{FB}$

$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CE}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{ED}$

Exercice 3

Est-il possible d'avoir 3 points de l'espace A, B et C tels que $AB = 3$, $AC = 6$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$?

Exercice 4

On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ et $\vec{u} \cdot \vec{w} = 4$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v} - 3\vec{w}$.

Exercice 5

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que $||\vec{u}|| = 3$ et $||\vec{v}|| = 7$. Que valent $||\vec{u} + \vec{v}||$ et $||\vec{u} - \vec{v}||$?

Exercice 6

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants.

1) $||\vec{u}|| = 2$, $||\vec{v}|| = 3$, $||\vec{u} - \vec{v}|| = 4$
2) $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = 2$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 3$
3) $||\vec{u} - \vec{v}|| = 7$, $||\vec{u} + \vec{v}|| = 12$

Base orthonormée

Exercice 7

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé.

Montrer que $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Exercice 8

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(2; 5; 1)$, $B(3; 1; 2)$, $C(8; 2; x)$.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) Pour quelle valeur du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 9

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit x un réel. On considère les points $A(3; 4; 2)$, $B(5; 2; 2x)$, $C(3; 10; x)$.
Pour quelles valeurs du réel x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils orthogonaux ?

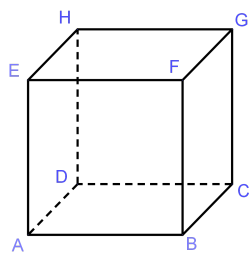
Exercice 10

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$, $C(-1; 1; 1)$.

1) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
3) Calculer les longueurs AB et AC.
4) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré près.

Exercice 11

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arêtes de longueur 1 ainsi que les points I, J et K, centres respectifs des faces $ABCD$, $BCGF$ et $ABFE$.
On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1) Donner les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.
2) Calculer $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK}$
3) En déduire la valeur de l'angle $\widehat{JIK}$.
4) Quelle est la nature du triangle IJK ?

Exercice 12

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2; 5; 1)$, $B(3; 2; 3)$ et $C(3; 6; 2)$.

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 13

On se place dans un cube $ABCDEFGH$.

1) Quelle est la nature du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$?
2) Déterminer les coordonnées des points F, D, B et H dans ce repère.
3) En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{BH}$
4) Les droites (DF) et (BH) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 14

On considère les points $A(2;1;5)$ et $B(3;2;3)$ ainsi que la droite Δ admettant pour représentation paramétrique

$$\Delta : \begin{cases} x = 4+3t \\ y = 2+t \\ z = -5+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Les droites (AB) et Δ sont-elles orthogonales ?

Exercice 15

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(1;2;1)$, $B(3;4;1)$, $C(4;-1;6)$ et $D(6;1;6)$. Montrer que $ABDC$ est un rectangle.

Exercice 16

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par O et dirigé par les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$. Montrer que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 17

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé. On considère les points $A(3;-2;-2)$, $B(1;3;-8)$ et $C(-2;0;4)$ ainsi que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 18

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. On considère deux droites (d_1) et (d_2) admettant pour représentations paramétriques respectives

$$(d_1) : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} (d_2) : \begin{cases} x = -5+2t' \\ y = -1+t' \\ z = 5 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

1) Donner un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite (d_1) et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite (d_2).
2) Montrer que le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.
3) Montrer que le point $B(3;3;5)$ appartient à la droite (d_2)
4) Montrer que la droite Δ passant par le point B et dirigé par le vecteur $\vec{v}$ est perpendiculaire aux droites (d_1) et (d_2).

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$. Ainsi, $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{14}{7\times 4} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ (ou 60°).

Corrigé de l'exercice 2

On a ...

- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = AD\times AB\times\cos(\widehat{BAD}) = 1\times 1\times 0 = 0$
- $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{FG} = AD\times FG\times\cos(0) = 1\times 1\times 1 = 1$
- $\overrightarrow{EH}\cdot\overrightarrow{ED} = EH\times ED\times\cos(\widehat{HED}) = 1\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$
- $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{FB} = DH\times FB\times\cos(180°) = 1\times 1\times(-1) = -1$
- $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CE} = CG\times CE\times\cos(\widehat{GCE}) = 1\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 1$
- $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{ED} = EG\times ED\times\cos(60°) = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{1}{2} = 1$

Corrigé de l'exercice 3

On aurait $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$ et donc $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \dfrac{20}{18}$. Un cosinus étant toujours entre -1 et 1, c'est impossible.

Corrigé de l'exercice 4

On a alors $\vec{u}\cdot(4\vec{v}-3\vec{w}) = 4\vec{u}\cdot\vec{v}-3\vec{u}\cdot\vec{w} = 12-12 = 0$

Le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $4\vec{v}-3\vec{w}$.

Corrigé de l'exercice 5

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, ce qui implique que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. On a

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 + 2\times 0 + 7^2 = 58$$

et donc $||\vec{u}+\vec{v}|| = \sqrt{58}$.

$$||\vec{u}-\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + ||\vec{v}||^2 = 3^2 - 2\times 0 + 7^2 = 58$$

et $||\vec{u}-\vec{v}|| = \sqrt{58}$.

Corrigé de l'exercice 6

On a...

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\dfrac{1}{2}(||\vec{u}-\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2) = -\dfrac{1}{2}(4^2-3^2-2^2) = \dfrac{3}{2}$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2) = \dfrac{1}{2}(3^2-5^2-2^2) = -10$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{4}(||\vec{u}+\vec{v}||^2-||\vec{u}-\vec{v}||^2) = \dfrac{1}{4}(12^2-7^2) = \dfrac{95}{4}$

Corrigé de l'exercice 7

On a $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 3+5\times 3-9\times 2 = 0$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Corrigé de l'exercice 8

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-3\\x-1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire $1\times 6-4\times(-3)+1\times(x-1) = 0$ c'est-à-dire $19+x = 0$ d'où $x = -17$.

Corrigé de l'exercice 9

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\2x-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\6\\x-2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, c'est-à-dire $2\times 0-2\times 6+(2x-2)\times(x-2) = 0$

On a donc $2x^2-6x-8 = 0$. C'est un polynôme du second degré dont les racines sont -1 et 4. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si et seulement si $x = -1$ ou $x = 4$.

Corrigé de l'exercice 10

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-(-1)\\2-2\\4-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-(-1)\\1-2\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

Puisque l'on est dans un repère orthonormé, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 0+0\times -1+4\times 1 = 4$.

On a $AB = \sqrt{2^2+0^2+4^2} = \sqrt{20}$ et $BC = \sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$.

On sait que $4 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$.

Ainsi, $\sqrt{20}\times\sqrt{2}\times\cos(\widehat{BAC}) = 4$ d'où $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$ et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure environ 51 degrés (utiliser arccos ou $\cos^{-1}$ sur la calculatrice).

Corrigé de l'exercice 11

[] Les points I, J et K ont pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$, $\left(1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2};0;\dfrac{1}{2}\right)$ comme coordonnées respectives dans le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0.5\\0\\0.5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\-0.5\\0.5\end{pmatrix}$. Puisque le repère $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est orthonormé,

$$\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = 0.5\times 0-0\times 0.5+0.5\times 0.5 = 0.25 = \frac{1}{4}$$

On sait de plus que $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = IJ\times IK\times\cos(\widehat{JIK})$. Or,

- $IJ = \sqrt{0.5^2+0^2+0.5^2} = \sqrt{0.5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $IK = \sqrt{0^2+(-0.5)^2+0.5^2} = \sqrt{0.5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi, $\cos(\widehat{JIK}) = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{2}$ et donc $\widehat{JIK} = \dfrac{\pi}{3}$.

Puisque $IJ = IK$, le triangle IJK est isocèle en I. On a donc $\widehat{JKI} = \widehat{IJK}$. Or, $\widehat{JIK} = \dfrac{\pi}{3}$ et la somme des angles d'un triangle vaut π radians. On a donc $\widehat{JKI} = \widehat{IJK} = \dfrac{\pi}{3}$. Le triangle IJK est donc équilatéral.

Corrigé de l'exercice 12

[] On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times1-3\times1+2\times1=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Les droites (AB) et (AC) sont donc orthogonales. De plus, ces droites ont le point A en commun, elles sont donc perpendiculaires.

Corrigé de l'exercice 13

[] Ce repère est orthonormé.

On a $F(1,0,1)$, $D(0,1,0)$, $B(1,0,0)$, $H(0,1,1)$, $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{BH}=-1\times(-1)+1\times1-1\times1=1\neq0$. Les droites (DF) et (BH) ne sont pas perpendiculaires.

Corrigé de l'exercice 14

La droite Δ est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$. La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=1\times3-1\times1-2\times2=0$. Les droites (AB) et Δ sont orthogonales.

Corrigé de l'exercice 15

D'une part, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\4-2\\1-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}6-4\\1-(-1)\\6-6\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Les points A, B, C et D sont donc coplanaires et $ABDC$ est un parallélogramme.

De plus, on a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}6-3\\1-4\\6-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}3\\-3\\5\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=2\times3-2\times3+0\times5=0$. L'angle $\widehat{ABD}$ est un angle droit. $ABDC$ est un parallélogramme ayant un angle droit, c'est donc un rectangle.

Corrigé de l'exercice 16

Puisque le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est orthonormé, on a donc

- $\vec{v}_1\cdot\vec{u}=1\times2+4\times(-1)+1\times2=0$
- $\vec{v}_2\cdot\vec{u}=3\times2-1\times1-2\times2=0$

Ainsi, $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan $\mathcal{P}$. $\vec{u}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

Corrigé de l'exercice 17

On a

- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(1-3)+2\times(3-(-2))+1\times(-8-(-2))=0$
- $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2-3)+2\times(0-(-2))+1\times(4-(-2))=0$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Il est donc normal au plan (ABC).

Corrigé de l'exercice 18

1) Le vecteur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ dirige la droite (d_1). Le vecteur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ dirige la droite (d_2).

2) On considère le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$

   - $\vec{v}\cdot\vec{u}_1=1\times1-2\times(-1)-3\times1=0$
   - $\vec{v}\cdot\vec{u}_2=1\times2-2\times1-3\times0=0$

   $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$.

3) En prenant $t'=4$ dans l'équation de (d_2), on obtient le point de coordonnées $(3;3;5)$. Le point $B(3;3;5)$ appartient à la droite (d_2).

4) La droite Δ passant par le point B et dirigée par le vecteur $\vec{v}$ est perpendiculaire à la droite (d_2). En effet $\vec{v}$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux et les deux droites ont en commun le point B. On sait de plus que (d_1) et Δ sont orthogonales. Il reste à montrer qu'elles sont sécantes.

   Une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases}x=3+t'\\y=3-2t'\\z=5-3t'\end{cases},t'\in\mathbb{R}$

   Chercher l'intersection de (d_1) et Δ revient à chercher deux réels t et t' tels que $\begin{pmatrix}2+t\\3-t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+t'\\3-2t'\\5-3t'\end{pmatrix}$.

   La dernière ligne permet d'exprimer t en fonction de t'. remplaçons t par $5-3t'$ dans la première ligne. On obtient alors $2+5-3t'=3+t'$ d'où $t'=1$. Puisque $t=5-3t'$, on a alors $t=2$

   Vérifions : en remplaçant t par 2 dans l'équation de (d_1), on obtient le point de coordonnées $(4;1;;2)$. En replaçant t' par 1 dans l'équation de Δ, on obtient le point de coordonnées $(4;1;2)$. Les droites Δ et (d_1) sont donc sécantes. Puisqu'elles sont orthogonales, elles sont donc perpendiculaires.

   Ainsi, Δ est perpendiculaire à (d_1) et (d_2).