Introduction au produit scalaire

Tspé Maths

January 26, 2025

1. Travail d'une force

Définition :
Le **travail d'une force** représente l'**énergie** fournie, ou dissipée, par une force lors d'un déplacement d'un système.

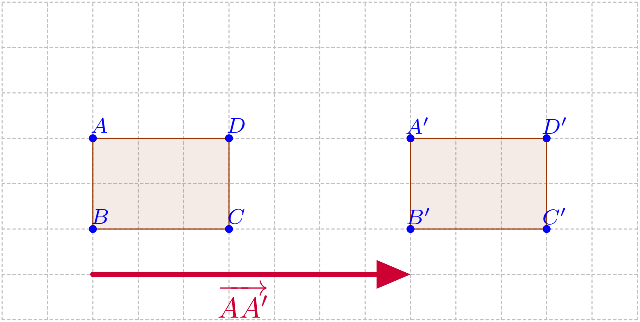
Définition :

Le **travail d'une force** représente l'**énergie** fournie, ou dissipée, par une force lors d'un déplacement d'un système.

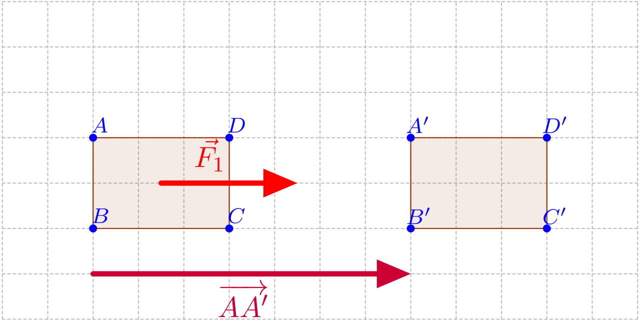
Exemple :

Déplacement d'un solide avec un mouvement rectiligne :

1. Travail d'une force

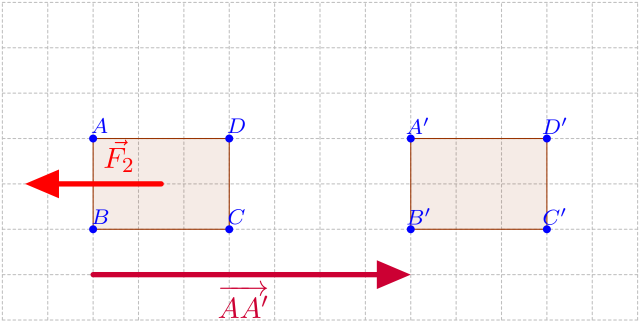


1. Travail d’une force

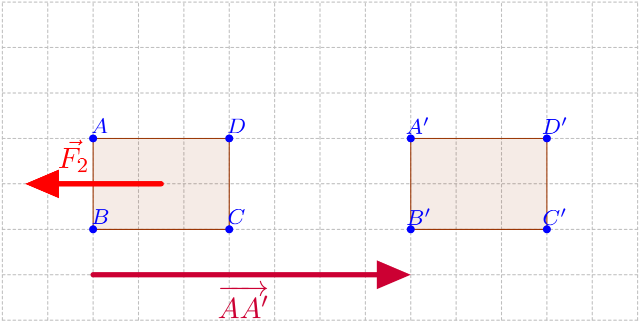


La force est **motrice**, elle favorise le déplacement, elle apporte de l’énergie au système.

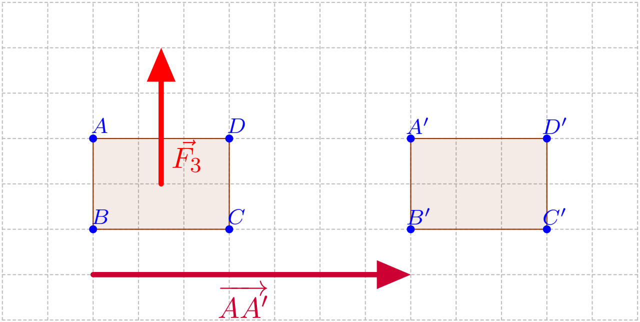
1. Travail d'une force



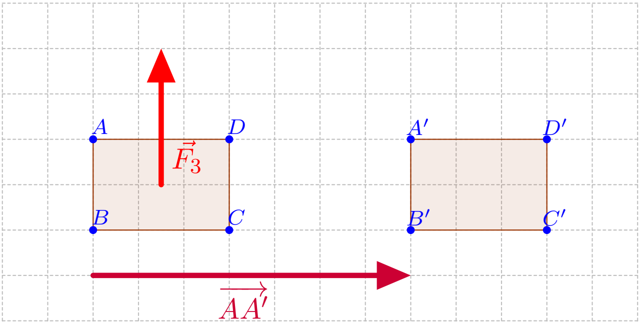
1. Travail d'une force



La force est **résistante**, elle s'oppose au déplacement, elle fait perdre de l'énergie au système.


A
D
$\vec{F}_3$
B
C
A'
D'
B'
C'
$\overrightarrow{AA'}$

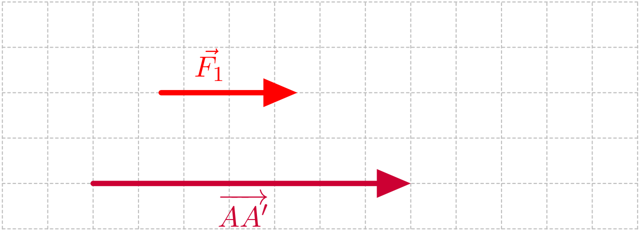
1. Travail d'une force



La force n'a pas d'effet sur le déplacement, elle ne travaille pas.

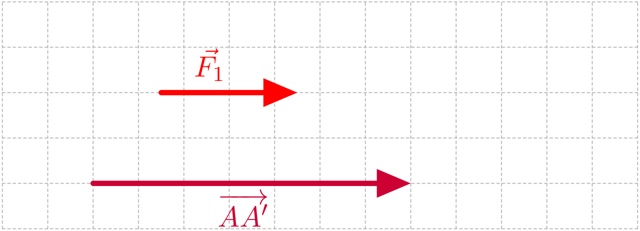
Le physicien a besoin de quantifier l'effet de la force sur le déplacement.
Comment l'aider ?

1ère situation :



Le physicien a besoin de quantifier l'effet de la force sur le déplacement. Comment l'aider ?

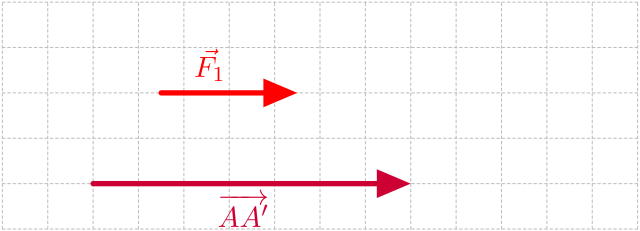
1ère situation :



Comment mesurer le travail dans cette situation ?

2. Mesurer le travail d'une force lors d'un déplacement.

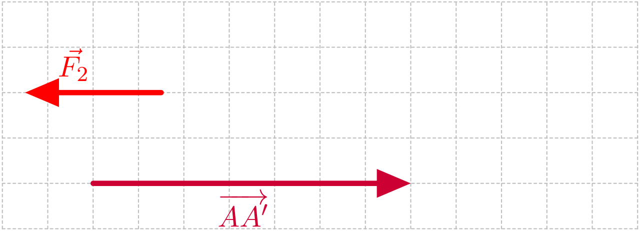
Le physicien a besoin de quantifier l'effet de la force sur le déplacement.
Comment l'aider ?
1ère situation :



Comment mesurer le travail dans cette situation ?
Les deux vecteurs ayant même direction et même sens,
l'idée de calculer $W_{AA'}(\overrightarrow{F}) = 7 \times 3 = 21$ Joules.
On observe que le travail est positif, il est bien moteur.

Le physicien a besoin de quantifier l'effet de la force sur le déplacement.
Comment l'aider ?

2ème situation :

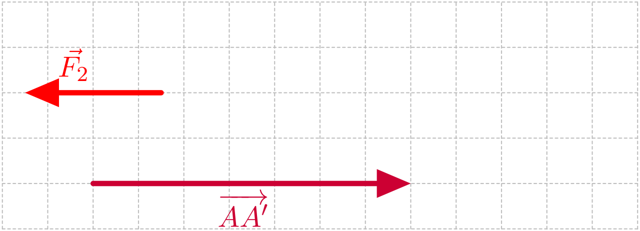


Comment mesurer le travail dans cette situation ?

2. Mesurer le travail d'une force lors d'un déplacement.

Le physicien a besoin de quantifier l'effet de la force sur le déplacement.
Comment l'aider ?

2ème situation :

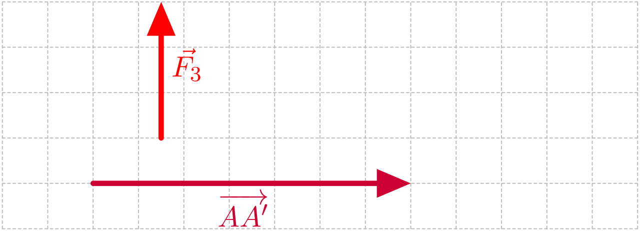


Comment mesurer le travail dans cette situation ?
Les deux vecteurs ayant même direction et même sens,
l'idée de calculer $W_{AA'}(\overrightarrow{F}) = -7 \times 3 = -21$ Joules.
On observe que le travail est négatif, il est bien résistant.

2. Mesurer le travail d'une force lors d'un déplacement.

Le physicien a besoin de quantifier l'effet de la force sur le déplacement.
Comment l'aider ?

2ème situation :

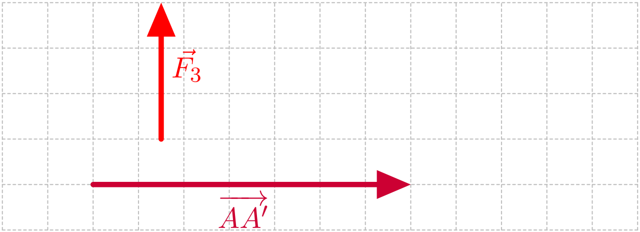


Comment mesurer le travail dans cette situation ?

2. Mesurer le travail d'une force lors d'un déplacement.

Le physicien a besoin de quantifier l'effet de la force sur le déplacement.
Comment l'aider ?

2ème situation :



Comment mesurer le travail dans cette situation ?
Les deux vecteurs sont orthogonaux,
l'idée de calculer $W_{AA'}(\overrightarrow{F}) = 0$ Joule.
On observe que le travail est nul, la force n'a pas d'effet.

Bilan :
Le physicien a besoin de composer deux vecteurs pour en produire une quantité, qui peut être positive ou négative.

Bilan :
Le physicien a besoin de composer deux vecteurs pour en produire une quantité, qui peut être positive ou négative.

D'un point de vue mathématique,
il opère deux vecteurs pour obtenir un réel.

3. Point de vue mathématiques

Bilan :

Le physicien a besoin de composer deux vecteurs pour en produire une quantité, qui peut être positive ou négative.

D'un point de vue mathématique,
il opère deux vecteurs pour obtenir un réel.

C'est étonnant :
A partir de deux éléments d'un ensemble, on produit un élément d'un autre ensemble.

4. Notion d'espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel, dont la définition sera donnée en post-bac.
$\vec{u} \in E$ et $\vec{v} \in E$.

4. Notion d'espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel, dont la définition sera donnée en post-bac.
$\vec{u} \in E$ et $\vec{v} \in E$.
On a défini :

$$\vec{u} + \vec{v} \in E$$

4. Notion d'espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel, dont la définition sera donnée en post-bac.
$\vec{u} \in E$ et $\vec{v} \in E$.
On a défini :

$$\vec{u} + \vec{v} \in E$$

On dit que l'addition est une opération **interne** de E.

Par exemple :

La loi $+$ et la loi $\times$ sont des lois interne de $\mathbb{N}$.

Par exemple :
La loi $+$ et la loi $\times$ sont des lois interne de $\mathbb{N}$.

$$3 + 5 \in \mathbb{N} \qquad 7 \times 8 \in \mathbb{N}$$

Par exemple :
La loi $+$ et la loi $\times$ sont des lois interne de $\mathbb{N}$.

$$3 + 5 \in \mathbb{N} \qquad 7 \times 8 \in \mathbb{N}$$

La loi $-$ n'est pas une **loi interne** de $\mathbb{N}$, en, effet $3 - 5 \notin \mathbb{N}$

Donc la loi $+$ est interne dans E.

4. Notion d'espace vectoriel

Donc la loi $+$ est interne dans E.

Pour les matheux :

Pour tout $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) \in E \times E \times E$

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

4. Notion d'espace vectoriel

Donc la loi $+$ est interne dans E.

Pour les matheux :

Pour tout $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) \in E \times E \times E$

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

donc la loi $+$ est **associative** dans E.

Donc la loi $+$ est interne dans E.

Pour les matheux :

Pour tout $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) \in E \times E \times E$

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

donc la loi $+$ est **associative** dans E.

Chaque élément possède un **symétrique** :

Pour tout $\vec{u} \in E$, il existe un unique $\overrightarrow{-u} \in E$ tel que

$$\vec{u}+(\overrightarrow{-u})=\vec{0}$$

4. Notion d'espace vectoriel

Donc la loi $+$ est interne dans E.

Pour les matheux :

Pour tout $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) \in E \times E \times E$

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

donc la loi $+$ est **associative** dans E.

Chaque élément possède un **symétrique** :

Pour tout $\vec{u} \in E$, il existe un unique $\overrightarrow{-u} \in E$ tel que

$$\vec{u}+(\overrightarrow{-u})=\vec{0}$$

Il existe un **élément neutre** :

Pour tout $\vec{u} \in E$,

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$$

Donc la loi $+$ est interne dans E.

Pour les matheux :

Pour tout $(\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}) \in E \times E \times E$

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

donc la loi $+$ est **associative** dans E.

Chaque élément possède un **symétrique** :

Pour tout $\vec{u} \in E$, il existe un unique $\overrightarrow{-u} \in E$ tel que

$$\vec{u}+(\overrightarrow{-u})=\vec{0}$$

Il existe un **élément neutre** :

Pour tout $\vec{u} \in E$,

$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$$

Cet ensemble confère à $(E,+)$ un statut de **groupe**.

Il est bien plus que cela mais passons...

Qu'en est-il de la multiplication ??

On définit la loi $\times$ ainsi :

4. Notion d'espace vectoriel

On définit la loi $\times$ ainsi :
Pour tout $k \in \mathbb{R}$, et pour tout vecteur $\vec{u} \in E$,
on définit le vecteur $k \times u$ qui vérifie des propriétés connues, qu'on ne va pas détailler ici.

4. Notion d'espace vectoriel

On définit la loi $\times$ ainsi :
Pour tout $k \in \mathbb{R}$, et pour tout vecteur $\vec{u} \in E$,
on définit le vecteur $k \times u$ qui vérifie des propriétés connues, qu'on ne va pas détailler ici.

$$3 \times \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$$

4. Notion d'espace vectoriel

On définit la loi $\times$ ainsi :
Pour tout $k \in \mathbb{R}$, et pour tout vecteur $\vec{u} \in E$,
on définit le vecteur $k \times u$ qui vérifie des propriétés connues, qu'on ne va pas détailler ici.

$$3 \times \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$$

La loi $\times$ est-elle **interne** dans E ?

4. Notion d'espace vectoriel

On définit la loi $\times$ ainsi :
Pour tout $k \in \mathbb{R}$, et pour tout vecteur $\vec{u} \in E$,
on définit le vecteur $k \times u$ qui vérifie des propriétés connues, qu'on ne va pas détailler ici.

$$3 \times \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$$

La loi $\times$ est-elle **interne** dans E ?
Non, puisque $k \notin E$, mais $k \in \mathbb{R}$.

4. Notion d'espace vectoriel

On définit la loi $\times$ ainsi :
Pour tout $k \in \mathbb{R}$, et pour tout vecteur $\vec{u} \in E$,
on définit le vecteur $k \times u$ qui vérifie des propriétés connues, qu'on ne va pas détailler ici.

$$3 \times \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$$

La loi $\times$ est-elle **interne** dans E ?
Non, puisque $k \notin E$, mais $k \in \mathbb{R}$.
Il faut donc bien comprendre la subtilité de la notation :

$$3 \times \vec{u}$$

qui associe deux éléments de deux ensembles distincts.

4. Notion d'espace vectoriel

On définit la loi $\times$ ainsi :
Pour tout $k \in \mathbb{R}$, et pour tout vecteur $\vec{u} \in E$,
on définit le vecteur $k \times u$ qui vérifie des propriétés connues, qu'on ne va pas détailler ici.

$$3 \times \vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$$

La loi $\times$ est-elle **interne** dans E ?
Non, puisque $k \notin E$, mais $k \in \mathbb{R}$.
Il faut donc bien comprendre la subtilité de la notation :

$$3 \times \vec{u}$$

qui associe deux éléments de deux ensembles distincts.

$$k \times u \in E$$

donc on dit que la loi $\times$ est une loi **externe** de E.

4. Notion d'espace vectoriel

Un espace muni d'une loi interne $+$ qui a les propriétés d'un groupe commutatif et d'une loi externe $\times$ qui vérifie certaines propriétés proches donne le nom à un ensemble appelé **espace vectoriel**. (post bac)

5. Produit scalaire

Revenons-en à nos moutons du travail d'une force.

5. Produit scalaire

Revenons-en à nos moutons du travail d'une force.

Le physicien veut une loi qui à deux vecteurs associe un réel !

5. Produit scalaire

Revenons-en à nos moutons du travail d'une force.

Le physicien veut une loi qui à deux vecteurs associe un réel !

Ce n'est pas une **loi interne**, puisque le résultat est un réel.

Revenons-en à nos moutons du travail d'une force.

Le physicien veut une loi qui à deux vecteurs associe un réel !

Ce n'est pas une **loi interne**, puisque le résultat est un réel.

Ce n'est pas une **loi externe**, puisqu'elle opère deux vecteurs.

5. Produit scalaire

On note $\cdot$ ce produit scalaire,
qui n'est pas une loi (interne ou externe) de E.

5. Produit scalaire

On note $\cdot$ ce produit scalaire,
qui n'est pas une loi (interne ou externe) de E.

C'est une **application** qui à chaque couple de vecteurs associe un réel :
Pour tout $\vec{u} \in E$ et pour tout $\vec{v} \in E$,

$$(\vec{u}; \vec{v}) \mapsto k \in \mathbb{R}$$

On note $\cdot$ ce produit scalaire,
qui n'est pas une loi (interne ou externe) de E.

C'est une **application** qui à chaque couple de vecteurs associe un réel :
Pour tout $\vec{u} \in E$ et pour tout $\vec{v} \in E$,

$$(\vec{u}; \vec{v}) \mapsto k \in \mathbb{R}$$

On note :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = k \in \mathbb{R}$$

5. Produit scalaire

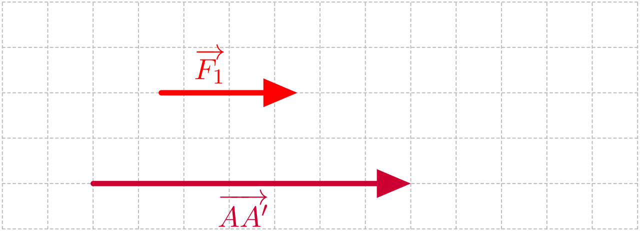
Attention, le produit scalaire n'est donc pas l'opération de la multiplication pour les vecteurs.

5. Produit scalaire

Attention, le produit scalaire n'est donc pas l'opération de la multiplication pour les vecteurs.
Le terme **produit** peut prêter à confusion.
D'ailleurs, un autre produit sera défini plus tard, en post-bac, le produit vectoriel sur d'autres bases

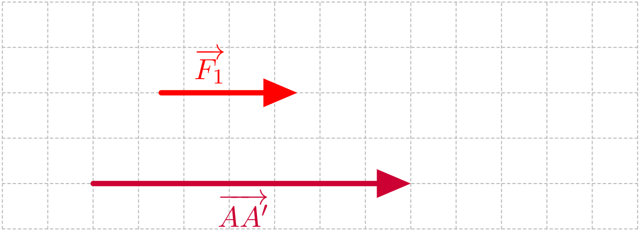
$$\vec{u} \wedge \vec{v}$$

6. Comment calculer un Produit scalaire



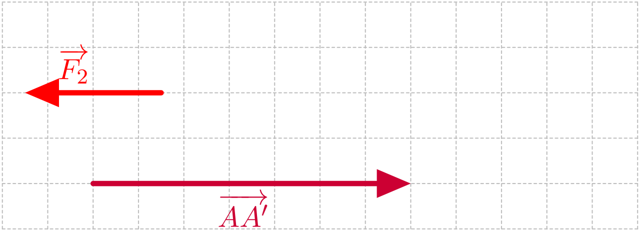
Pour des vecteurs colinéaires de même sens, on multiplie les intensités diraient les physiciens.

6. Comment calculer un Produit scalaire



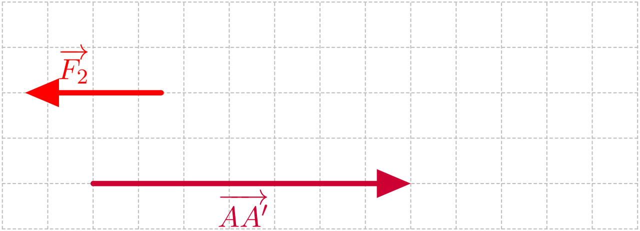
Pour des vecteurs colinéaires de même sens, on multiplie les intensités diraient les physiciens.

$$\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{AA'} = ||\overrightarrow{F_1}|| \times ||\overrightarrow{AA'}|| = 7 \times 3 = 21$$



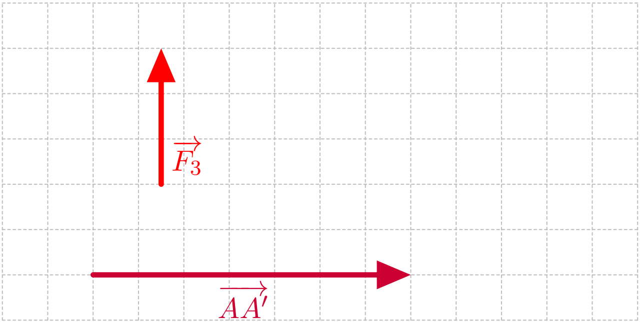
Pour des vecteurs colinéaires de sens contraire, on multiplie les intensités diraient les physiciens en affectant du signe $-$ pour exprimer la résistance.

6. Comment calculer un Produit scalaire



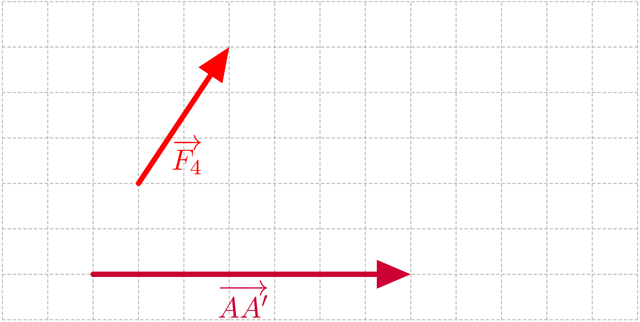
Pour des vecteurs colinéaires de sens contraire, on multiplie les intensités diraient les physiciens en affectant du signe $-$ pour exprimer la résistance.

$$\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{AA'} = ||\overrightarrow{F_2}|| \times ||\overrightarrow{AA'}|| = -7 \times 3 = -21$$



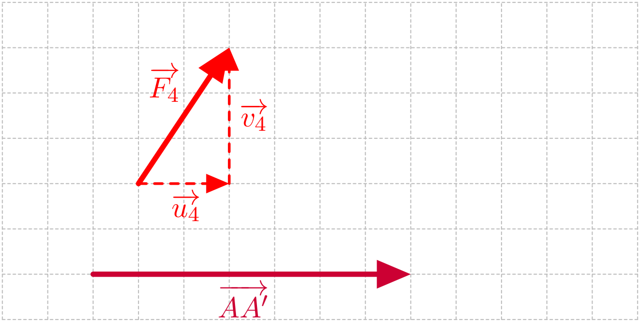
Pour des vecteurs orthogonaux, on a

$$\overrightarrow{F_3} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$$

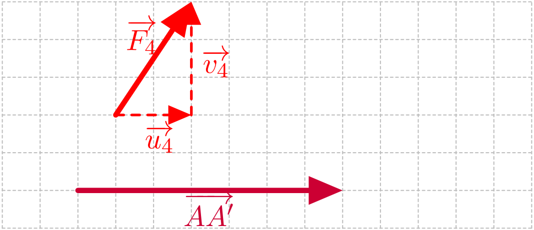


Comment calculer le produit scalaire ?

6. Comment calculer un Produit scalaire

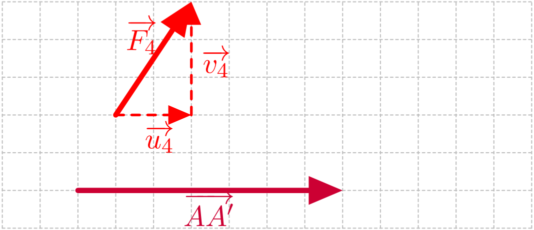


6. Comment calculer un Produit scalaire



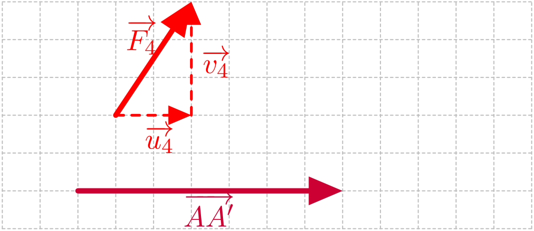
$$\overrightarrow{F_4} \cdot \overrightarrow{AA'} = (\overrightarrow{u_4} + \overrightarrow{v_4}) \cdot \overrightarrow{AA'}$$

6. Comment calculer un Produit scalaire

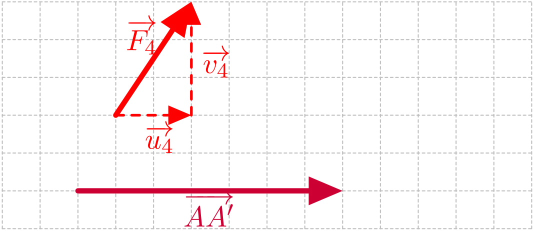


$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_4}\cdot\overrightarrow{AA'} &= (\overrightarrow{u_4}+\overrightarrow{v_4})\cdot\overrightarrow{AA'}\\ &= \overrightarrow{u_4}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{v_4}\cdot\overrightarrow{AA'} \quad \text{Propriété fbs}\end{aligned}$$

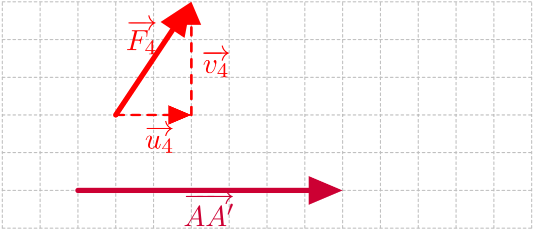
6. Comment calculer un Produit scalaire



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{F_4} \cdot \overrightarrow{AA'} &= (\overrightarrow{u_4} + \overrightarrow{v_4}) \cdot \overrightarrow{AA'} \\
&= \overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{v_4} \cdot \overrightarrow{AA'} \quad \text{Propriété fbs} \\
&= \overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{AA'}
\end{aligned}
$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_4} \cdot \overrightarrow{AA'} &= (\overrightarrow{u_4} + \overrightarrow{v_4}) \cdot \overrightarrow{AA'} \\ &= \overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{v_4} \cdot \overrightarrow{AA'} \quad \text{Propriété fbs} \\ &= \overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{AA'} \\ &= ||\overrightarrow{u_4}|| \times ||\overrightarrow{AA'}||\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F_4} \cdot \overrightarrow{AA'} &= (\overrightarrow{u_4} + \overrightarrow{v_4}) \cdot \overrightarrow{AA'} \\
&= \overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{v_4} \cdot \overrightarrow{AA'} \quad \text{Propriété fbs} \\
&= \overrightarrow{u_4} \cdot \overrightarrow{AA'} \\
&= ||\overrightarrow{u_4}|| \times ||\overrightarrow{AA'}|| \\
&= 2 \times 7 = 14
\end{aligned}$$

6. Comment calculer un Produit scalaire

Première définition :

Soit trois points distincts du plan, A, B, et C.

Soit H le projeté orthogonal de $\mathrm{C}\,\mathrm{sur}(\mathrm{AB})$.

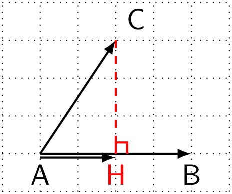
On a alors

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}}$$

6. Comment calculer un Produit scalaire

Première définition :
Soit trois points distincts du plan, A, B, et C.
Soit H le projeté orthogonal de $\mathrm{C}\,\mathrm{sur}(\mathrm{AB})$.
On a alors

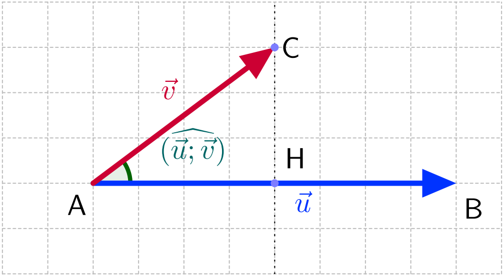
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}}$$



Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est défini par :

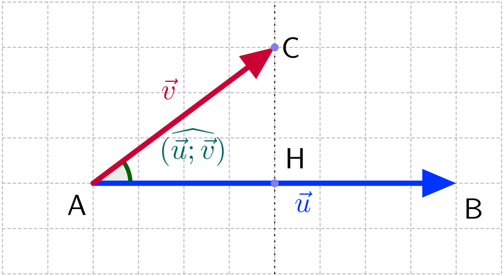
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu;
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.

Deuxième définition :



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u}$$

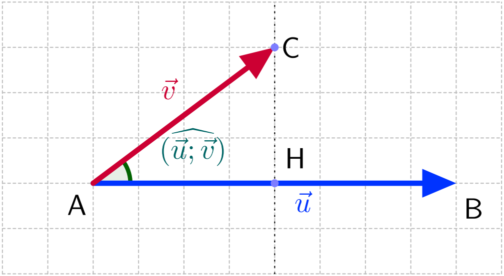
Deuxième définition :



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u}$$

$$= \overline{AH} \times ||\overrightarrow{u}||$$

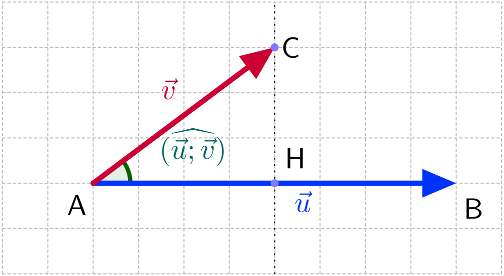
Deuxième définition :



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u}$$
$$= \overline{AH}\times||\overrightarrow{u}||$$

$$\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{AH}{AC}$$

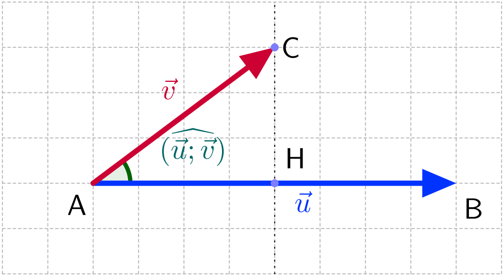
Deuxième définition :



$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u}\\ &= \overline{AH}\times||\overrightarrow{u}||\\ &= AC\times\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})\times||\overrightarrow{u}||\end{aligned}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{AH}{AC}$$

Deuxième définition :



$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{u}\\ &= \overline{AH}\times||\overrightarrow{u}||\\ &= AC\times\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})\times||\overrightarrow{u}||\\ &= ||\overrightarrow{v}||\times\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})\times||\overrightarrow{u}||\end{aligned}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{AH}{AC}$$

Deuxième définition :
On appelle produit scalaire de deux vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Troisième définition :

Soit dans un repère orthonormé : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Troisième définition :

Soit dans un repère orthonormé : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

On sait que $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = (x')^2 + (y')^2$.

Or, $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

6. Comment calculer un Produit scalaire

Troisième définition :

Soit dans un repère orthonormé : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

On sait que $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = (x')^2 + (y')^2$.

Or, $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$, et par conséquent :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2$$

Troisième définition :

Soit dans un repère orthonormé : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

On sait que $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 \quad$ et $\quad \|\vec{v}\|^2 = (x')^2 + (y')^2$.

Or, $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$, et par conséquent :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (x + x')^2 + (y + y')^2 \\ &= x^2 + (x')^2 + 2xx' + y^2 + (y')^2 + 2yy'. \end{aligned}$$

6. Comment calculer un Produit scalaire

On sait que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

6. Comment calculer un Produit scalaire

On sait que :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 + (x')^2 + 2xx' + y^2 + (y')^2 + 2yy'\right.\end{aligned}$$

6. Comment calculer un Produit scalaire

On sait que :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 + (x')^2 + 2xx' + y^2 + (y')^2 + 2yy' - (x^2 + y^2)\right)\end{aligned}$$

6. Comment calculer un Produit scalaire

On sait que :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 + (x')^2 + 2xx' + y^2 + (y')^2 + 2yy' - (x^2 + y^2) - (x')^2 + (y')^2\right)\end{aligned}$$

6. Comment calculer un Produit scalaire

On sait que :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 + (x')^2 + 2xx' + y^2 + (y')^2 + 2yy' - (x^2+y^2) - (x')^2 + (y')^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2xx' + 2yy')\right)\end{aligned}$$

6. Comment calculer un Produit scalaire

On sait que :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2 + (x')^2 + 2xx' + y^2 + (y')^2 + 2yy' - (x^2 + y^2) - (x')^2 + (y')^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2xx' + 2yy')\right) \\
&= xx' + yy'
\end{aligned}$$

Troisième définition :

Soit dans un repère orthonormé : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Orthogonalité:
Il permet de caractériser **l'orthogonalité de deux vecteurs**.

C'est donc un outil essentiel dans le plan

7. Quel intérêt au produit scalaire en maths ?

Orthogonalité:
Il permet de caractériser **l'orthogonalité de deux vecteurs**.

C'est donc un outil essentiel dans le plan

et dans l'espace....

Allez, on y retourne !