Cours & méthodes

Nombres Complexes
Point de vue géométrique

4 ANALYSE

1 Image d'un nombre complexe et affixe

1.1 Affixe d'un point

Définition 1

Le **plan complexe** est le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$.

- À tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, on associe le point M de coordonnées $(x\,;y)$;
- Réciproquement, à tout point $M(x\,;y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$;
- On dit que le point M est le **point image** du nombre complexe z et que z est l'**affixe** du point M.

Méthode 1 : Associer Nombre complexe et point dans le plan complexe

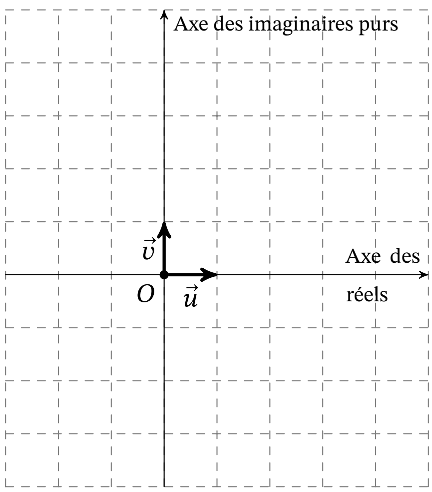
Dans le plan complexe,

a) Quelles sont les affixes des points $A(1\,;2)$ et $B(0\,;-3)$?

b) Placer dans le plan complexe les points $C(-2-\mathrm{i})$, $D(5)$, $E(4\mathrm{i})$ et $F(-3+2\mathrm{i})$.

c) Construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que $\Re(z) = 2$.

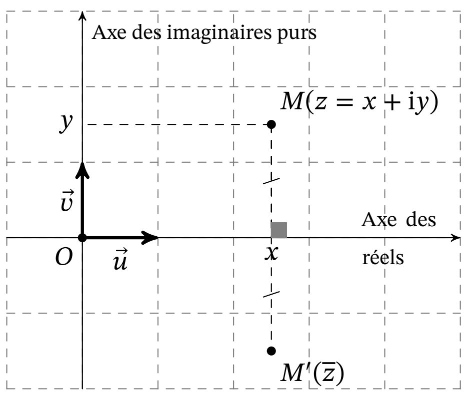
d) Construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe z tels que z^2 soit un nombre imaginaire pur.



Remarque 1

- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, appelé aussi **axe des réels**.
- Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points situés sur l'axe des ordonnées, appelé aussi **axe des imaginaires purs**.
- Deux nombres complexes conjugués ont des points images symétriques par rapport à l'axe des réels.

  En effet, si M est le point d'affixe z et M' le point d'affixe $\overline{z}$, alors M et M' ont la même abscisse et des ordonnées opposées.



Propriété 1

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.

- Les points A et B sont confondus si et seulement si $z_A = z_B$.
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Méthode 2 : Rédiger une démonstration dans le plan complexe.

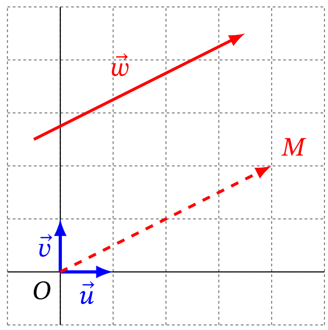
Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$z_A = -3 + \mathrm{i}$, $z_B = 5 - 3\mathrm{i}$, $z_C = 1 + \mathrm{i}$ et $z_D = -7 + 5\mathrm{i}$.
Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Correction

1.2 Affixe d'un vecteur

Définition 2

Dans le plan complexe, soit $\vec{w}$ un vecteur du plan de coordonnées $(x\,;y)$.
L'unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{w}$ a pour coordonnées $(x\,;y)$ et donc pour affixe $z = x + \mathrm{i}y$.
On dit alors que $\vec{w}(x\,;y)$ **a pour affixe** $z = x + \mathrm{i}y$.



Exemple 1

Sur la figure ci-contre, M a pour affixe $4 + 2\mathrm{i}$ donc $\vec{w}$ a pour affixe $z = 4 + 2\mathrm{i}$.

Remarque 2

Ce résultat suivant n'est que la version « complexe » des propriétés déjà connues pour les coordonnées de vecteurs.

Propriété 2

Dans le plan complexe, on considère deux vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ d'affixes respectives z et z', k un nombre réel.

- Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}'$ sont égaux si, et seulement si, $z = z'$.
- Le vecteur $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$. Le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz.
- Si A et B deux point du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$

Méthode 3 : Utiliser les vecteurs dans le plan complexe.

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :
$z_A = -3 + 5\mathrm{i}$, $z_B = -1 + \mathrm{i}$ et $z_C = -\mathrm{i}$.
Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Correction

2 Module d'un nombre complexe

2.1 Définition et interprétation graphique

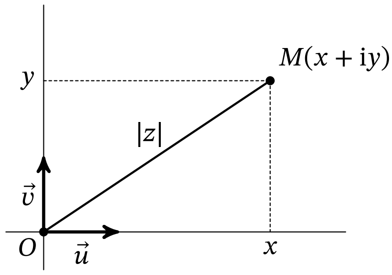
Définition 3

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels).
On appelle **module** de z, le nombre réel positif noté $|z|$, et défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque 3

Si M est le point d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ dans le plan complexe alors $|z|$ est la distance OM. En effet :

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$



Méthode 4 : Calculer le module d'un nombre complexe (niveau 1).

Calculer le module des nombres complexes suivants :
$z_1 = 2 - 3\mathrm{i}$, $z_2 = -5$ et $z_3 = 4\mathrm{i}$.

Correction

Remarque 4

- Si z est réel, le module de z est égal à la valeur absolue de z (d'où la notation analogue).
- Le module d'un nombre complexe sera souvent noté r ...pour rayon.
  Par exemple, $|z| = 2$ équivaut à dire que le point M d'affixe z appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

Propriété 3

Si A et B sont deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B, alors $AB = |z_B - z_A|$.

Méthode 5 : Rédiger une démonstration dans le plan complexe.

Dans le plan complexe, on considère les points :
$A(1 + 2\mathrm{i})$, $B(2)$ et $C(-1 + \mathrm{i})$.

a) Placer ces points dans le plan complexe et conjecturer la nature du triangle ABC.

b) Démontrer ou invalider votre conjecture.

Correction

2.2 Propriétés

Propriété 4 : Déjà vue dans la partie algébrique du cours

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels).

- $z = 0 \iff |z| = 0$
- $z\overline{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
- $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$

Propriété 5 : Déjà vue dans la partie algébrique du cours

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- Pour tout entier $n \geqslant 1$, $|z^n| = |z|^n$
- Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$
- Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Méthode 6 : Déterminer un lieu géométrique

Déterminer dans le plan complexe, l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que :

1) $|z| = 1$
2) $|z - \mathrm{i}| = 2$
3) $|z + 1 - \mathrm{i}| = \sqrt{2}$
4) $|z + 1| = |z - 2 + \mathrm{i}|$.

Correction

2.3 Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Notation : L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.
On a donc $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. L'ensemble des points images des éléments de $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique.

Propriété 6

Soient z et z' deux nombres complexes de l'ensemble $\mathbb{U}$.

- $z \times z' \in \mathbb{U}$
- $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$
- $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$

Remarque 5

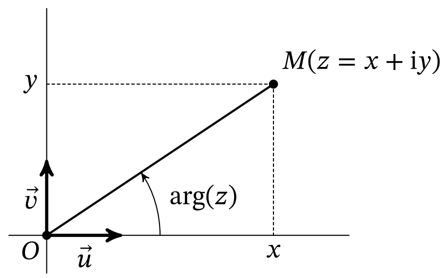
On dit que $\mathbb{U}$ est stable par produit, passage à l'inverse et quotient.

3 Arguments d'un nombre complexe non nul

3.1 Définition et interprétation graphique

Définition 4

Soit z un nombre complexe non nul et soit M le point d'affixe z. On appelle **argument** de z et on note $\arg(z)$, une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.



Attention 1

0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'arguments.

Remarque 6

Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments. Si θ est l'un d'entre eux, les autres s'écrivent $\theta + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif et donc θ est unique à 2π près. On écrit parfois $\arg(z) = \theta\ (2\pi)$ ou $\arg(z) = \theta\ [2\pi]$.

Méthode 7 : Déterminer l'argument d'un nombre complexe (niveau 2).

À l'aide d'un dessin, déterminer un argument de $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = -5$, $z_3 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_4 = 3$.

Correction

Propriété 7

Soient A et B deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.
On a alors $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)\ \ (2\pi)$

Méthode 8 : Déterminer un ensemble de points du plan complexe.

Dans le plan complexe, on considère les points $A(5 - 7\mathrm{i})$ et $B(6 - 8\mathrm{i})$.

a) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$.

b) Représenter l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que $\arg(z + 2) = -\dfrac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$

Correction

3.2 Propriétés

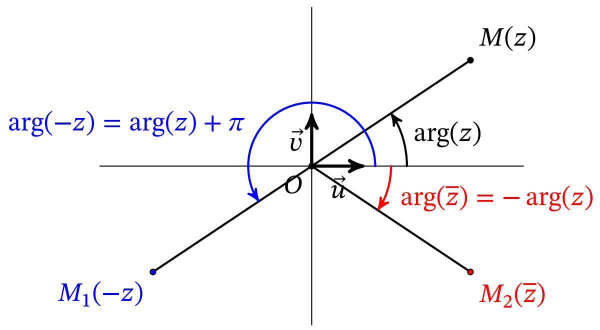
Propriété 8 : Propriétés des arguments

Soit z un nombre complexe non nul.

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ \ (2\pi)$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ \ (2\pi)$.
- z est un nombre réel si, et seulement si, $\arg(z) = 0\ \ (2\pi)$ ou $\arg(z) = \pi\ \ (2\pi)$.
- z est un imaginaire pur si, et seulement si, $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$ ou $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$.

Remarque 7

Il suffit de connaître le dessin ci-contre pour retrouver la propriété :

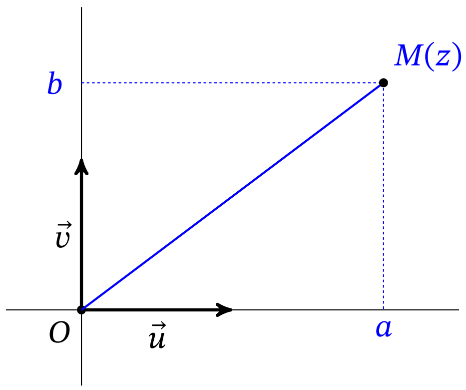


3.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Propriété 9 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe

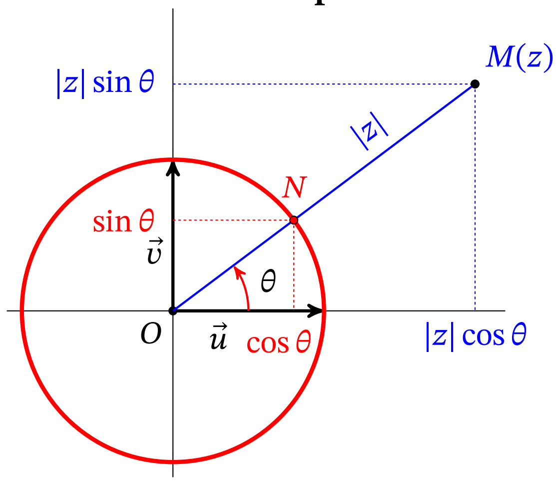
Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la forme $z = |z| (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ où θ est un argument de z, unique à 2π près.

Coordonnées cartésiennes :



$z = a + \mathrm{i}b$

Coordonnées polaires :



$z = |z| (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$

Définition 5

L'écriture $z = |z| (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est appelée **forme trigonométrique** de z.

Méthode 9 : Déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe.

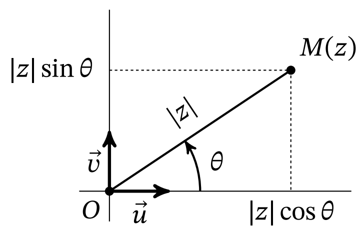
A l'aide d'un dessin, déterminer une forme trigonométrique des nombres $z_1 = 2\mathrm{i}$ et $z_2 = -3$.

Correction

Propriété 10 : Détermination d'un argument :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels).
Un argument de z est un réel θ tel que :

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|}$$



Méthode 10 : Déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes
$z_1 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$.

Correction

Méthode 11 : Déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 2$ et $\arg(z) = \dfrac{5\pi}{6}\ (2\pi)$
Déterminer la forme algébrique de z et placer le point image M de z dans le plan complexe.

Correction

Propriété 11

- Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont le même module et des arguments égaux à un multiple de 2π près.
- Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ et $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta\ (2\pi)$.

Méthode 12 : Déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Le nombre complexe $z = -3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ est-il écrit sous forme trigonométrique ?
Si ce n'est pas le cas, l'écrire sous cette forme.

Correction