Parcours d'exercices

Les Nombres Complexes

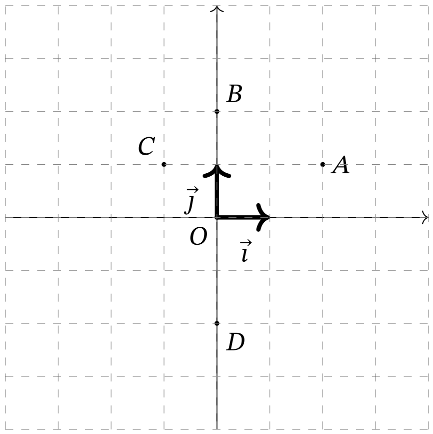
Point de vue géométrique

5

GEOMETRIE

1 Représentation des complexes dans le plan

Exercice 1



Donner les affixes des points A, B, C et D.

Exercice 2

Donner les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Exercice 3

Placer les points E et F, d'affixes respectives $2+3i$ et $-1-i$.

Exercice 4

Montrer, en utilisant un calcul, que les points A, E et C sont alignés.

Exercice 5

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $1+4i$, $2-i$ et $-3-5i$.

1) Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment $[AB]$.
2) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
3) Déterminer l'affixe du point E, symétrique du point A par rapport au point C.

Exercice 6

Soit z un nombre complexe et M le point du plan complexe d'affixe z.

1) Que représente le point M_1 d'affixe $\overline{z}$ par rapport à M?
2) Que représente le point M_2 d'affixe $-z$ par rapport à M?
3) Que représente le point M_3 d'affixe $-\overline{z}$ par rapport à M?

Exercice 7

Soit A, B et C trois points du plan complexe, d'affixes respectives a, b et c. Soit G le point du plan complexe tel que

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0.$$

1) Exprimer l'affixe g du point G en fonction de a, b et c.
2) Soit I le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les points A, G et I sont alignés.
3) Que représente le point G pour le triangle ABC?
4) Application : On considère que $a=1-2i$, $b=-3+2i$ et $c=5+3i$. Placer les points A, B, C et G dans un repère orthonormé. Tracer alors les trois médianes sur le triangle ABC.

2 Module d'un nombre complexe

Exercice 8

Déterminer les modules des nombres complexes suivants : $z_1=1+2i$, $z_2=-4+3i$, $z_3=5i$
$z_4=-3$, $z_5=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 9

Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixes respectives $1+i$, $5i-2$ et $2+4i$. Calculez les distances AB, AC et BC.

Exercice 10

Soit $A(-4+4i)$, $B(2+7i)$, $C(4+3i)$ et $D(-2)$ quatre points du plan complexe.

1) Placer ces points dans le plan complexe?
2) Quelle semble être la nature du quadrilatère $ABCD$?
3) Démontrer la conjecture de la question précédente.

Exercice 11

Dans chacun des cas, interpréter géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant l'égalité donnée.

1) $|z-3| = |z-5+i|$,
2) $|z-2-5i| = |2i+1-z|$,
3) $|z-5+4i| = 2$,
4) $|z-3i+1| \leqslant 4$,
5) $|z+1-i| = 1$,
6) $|z+4-2i| = |3-6i|$.

Exercice 12

Donner une équation du cercle de centre $C(1+2i)$ et de rayon 4.

Exercice 13

Soit $A(4i)$, $B(9+i)$ et $C(4-4i)$ trois points du plan complexe. Montrer que les points A, B et C sont sur le cercle de centre $D(4+i)$ et de rayon 5.

Exercice 14

Soit $z_1 = 2+5i$ et $z_2 = 3-2i$. Déterminer $|z_1|$ et $|z_2|$ puis en déduire $|z_1 z_2|$ et $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

Exercice 15

On note U l'ensemble de nombres complexes de module 1.

1) 0 appartient-il à $\mathbb{U}$? Donner au moins quatre éléments de l'ensemble $\mathbb{U}$.
2) Montrer que le produit et le quotient de deux éléments de $\mathbb{U}$ appartient à $\mathbb{U}$. On dit que $\mathbb{U}$ est stable par multiplication et division.
3) La somme de deux éléments de $\mathbb{U}$ est-elle dans $\mathbb{U}$?
4) Montrer que si $z \in \mathbb{U}$, alors $z + \frac{1}{z}$ est réel. Que dire de $z^2 - \frac{1}{z^2}$?

Exercice 16

Décrire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|(1+i)z - 2i| = 2$.

Exercice 17

Soit (z_n) une suite de nombres complexes et $l \in \mathbb{C}$. On dit que z_n tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$ si

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - l| = 0.$$

On admet que si z_n tend vers l et l', alors $l = l'$. On notera alors $\lim_{n\to+\infty} z_n = l$.

1) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{2i}{3}\right)^n$.

Calculer $\left|\frac{1}{2} - \frac{2i}{3}\right|$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty} z_n$.

2) On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = i$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{1+i}{2} a_n + (1-i).$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $|a_{n+1} - 2| = |a_n - 2|\sqrt{2}$.
b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 18

Soit z et z' deux nombres complexes. Montrer que

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2.$$

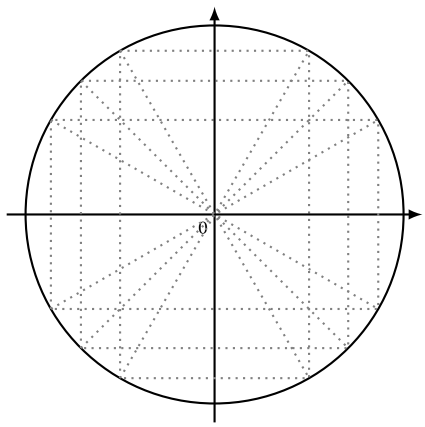
En déduire alors que dans un parallélogramme $ABCD$, on a

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

3 Trigonométrie

Exercice 19

On considère le cercle trigonométrique tracé ci-dessous et sur lequel sont placés certains points.



1) Déterminer les points images par l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique des réels suivants :

$A(\pi)$	$G(\frac{3\pi}{2})$	$L\left(\frac{-5\pi}{3}\right)$	$Q\left(\frac{19\pi}{3}\right)$
$B(2\pi)$	$H(\frac{-7\pi}{2})$	$M\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$R\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$
$C(-3\pi)$	$I(18\pi)$		
$D(2\pi)$	$J(\frac{17\pi}{2})$	$N\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$S\left(\frac{-37\pi}{6}\right)$
$E(18\pi)$			
$F(\frac{\pi}{2})$	$K\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$P\left(\frac{8\pi}{3}\right)$	$T\left(\frac{23\pi}{4}\right)$

Exercice 20

Déterminer la valeur exacte de :

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 5) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 4) $\cos(0)$

Exercice 21

Déterminer la valeur exacte de :

1) $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ 3) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 5) $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

2) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ 4) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Exercice 22

Déterminer une écriture plus simple, en fonction de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$.

1) $\sin(x+5\pi)$ 3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 5) $\sin(x-\pi)$

2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 4) $\cos(x-4\pi)$ 6) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 23

Soit x un réel.

Que vaut $(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2$?

Exercice 24

Résoudre les équations suivantes sur $x \in]-\pi;\pi]$ puis sur $[0;2\pi[$:

$\cos(x)=\frac{1}{2}$, $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(x)=0$, $\sin(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 25

Résoudre l'équation $\cos^2(x)-\frac{1}{2}=0$ sur $[0;2\pi]$.

4 Argument d'un nombre complexe

Exercice 26

Mettre les complexes suivants sous forme trigonométrique :

$z_1=2+2i$, $z_2=\sqrt{3}-i$, $z_3=\sqrt{3}+3i$, $z_4=-42$.

Exercice 27

Ècrire les complexes suivants sous forme algébrique :

$z_1=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$,

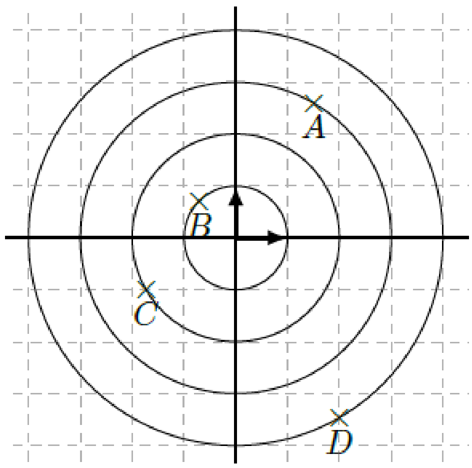
$z_2=5\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$,

$z_3=\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2$,

$z_4=42\left(\cos\left(\frac{23\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{23\pi}{2}\right)\right)$.

Exercice 28

Décrire géométriquement l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z)=\frac{\pi}{4}$.



Exercice 29

Donner le module et les arguments des points A, B, C et D dans la figure ci-contre.

Exercice 30

Placer le point E d'affixe z tel que $|z|=3$ et $\arg(z)\equiv\frac{5\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

Exercice 31

Placer le point F d'affixe $2\sqrt{3}-2i$.

Exercice 32

Représenter sur cette figure l'ensemble des points d'affixe z tel que $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

Exercice 33

Dans chacun des cas suivants, déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

1) $A(-2)$, $B(2+2i)$, $C(-5+6i)$,

2) $A(-6+4i)$, $B(-3+5i)$, $C(6+8i)$,

3) $A(-2-i)$, $B(3+i)$, $C(-9+2i)$,

4) $A(2+2i)$, $B(6+3i)$, $C\left(4-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{5}{2}+2\sqrt{3}\right)\right)$.