

Nombres Complexes

Point de vue géométrique

4

ANALYSE

1 Image d'un nombre complexe et affixe

1.1 Affixe d'un point

Définition 1

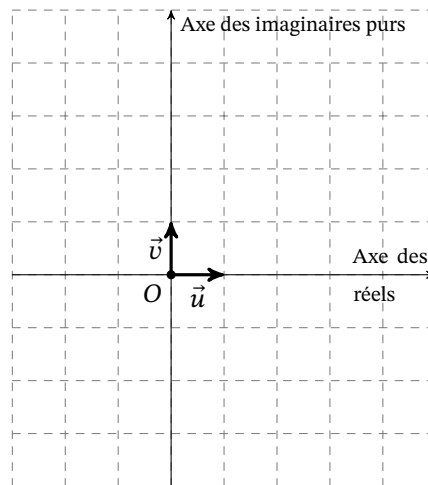
Le **plan complexe** est le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$.

- À tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réels, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$;
- Réciproquement, à tout point $M(x; y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = x + iy$;
- On dit que le point M est le **point image** du nombre complexe z et que z est l'**affixe** du point M .

Méthode 1 : Associer Nombre complexe et point dans le plan complexe

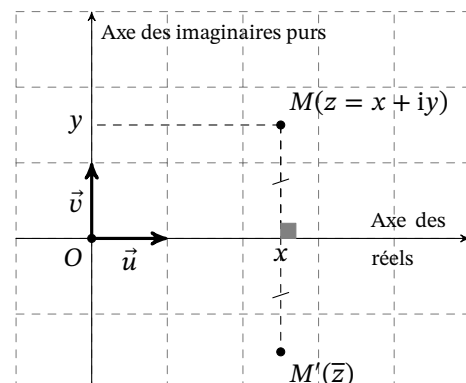
Dans le plan complexe,

- Quelles sont les affixes des points $A(1; 2)$ et $B(0; -3)$?
- Placer dans le plan complexe les points $C(-2 - i)$, $D(5)$, $E(4i)$ et $F(-3 + 2i)$.
- Construire l'ensemble \mathcal{E} des points M d'affixe z tels que $\Re(z) = 2$.
- Construire l'ensemble \mathcal{F} des points M d'affixe z tels que z^2 soit un nombre imaginaire pur.



Remarque 1

- Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses, appelé aussi **axe des réels**.
- Les nombres imaginaires purs sont les affixes des points situés sur l'axe des ordonnées, appelé aussi **axe des imaginaires purs**.
- Deux nombres complexes conjugués ont des points images symétriques par rapport à l'axe des réels.
En effet, si M est le point d'affixe z et M' le point d'affixe \bar{z} , alors M et M' ont la même abscisse et des ordonnées opposées.



Propriété 1

Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B .

- Les points A et B sont confondus si et seulement si $z_A = z_B$.
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$.

Méthode 2 : Rédiger une démonstration dans le plan complexe.

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = -3 + i, z_B = 5 - 3i, z_C = 1 + i \text{ et } z_D = -7 + 5i.$$

Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



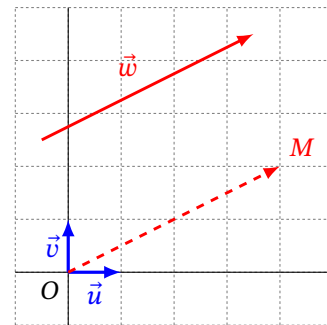
Correction

1.2 Affixe d'un vecteur**Définition 2**

Dans le plan complexe, soit \vec{w} un vecteur du plan de coordonnées $(x; y)$.

L'unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{w}$ a pour coordonnées $(x; y)$ et donc pour affixe $z = x + iy$.

On dit alors que $\vec{w}(x; y)$ a pour affixe $z = x + iy$.

**Exemple 1**

Sur la figure ci-contre, M a pour affixe $4 + 2i$ donc \vec{w} a pour affixe $z = 4 + 2i$.

Remarque 2

Ce résultat suivant n'est que la version « complexe » des propriétés déjà connues pour les coordonnées de vecteurs.

Propriété 2

Dans le plan complexe, on considère deux vecteurs \vec{w} et \vec{w}' d'affixes respectives z et z' , k un nombre réel.

- Les vecteurs \vec{w} et \vec{w}' sont égaux si, et seulement si, $z = z'$.
- Le vecteur $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$. Le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz .
- Si A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B , alors le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_B - z_A$.

Méthode 3 : Utiliser les vecteurs dans le plan complexe.

Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -3 + 5i, z_B = -1 + i \text{ et } z_C = -i.$$

Démontrer que les points A, B et C sont alignés.



Correction

2 Module d'un nombre complexe

2.1 Définition et interprétation graphique

Définition 3

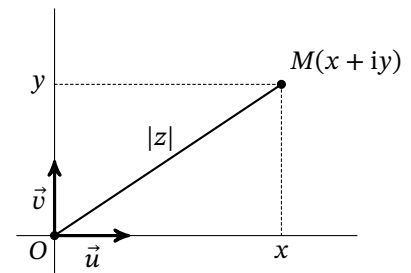
Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ (x et y réels).

On appelle **module** de z , le nombre réel positif noté $|z|$, et défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque 3

Si M est le point d'affixe $z = x + iy$ dans le plan complexe alors $|z|$ est la distance OM . En effet :

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$



Méthode 4 : Calculer le module d'un nombre complexe (niveau 1).

Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = -5 \text{ et } z_3 = 4i.$$



Correction

Remarque 4

- Si z est réel, le module de z est égal à la valeur absolue de z (d'où la notation analogue).
- Le module d'un nombre complexe sera souvent noté r ...pour rayon.

Par exemple, $|z| = 2$ équivaut à dire que le point M d'affixe z appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

Propriété 3

Si A et B sont deux points du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B , alors $AB = |z_B - z_A|$.

Méthode 5 : Rédiger une démonstration dans le plan complexe.

Dans le plan complexe, on considère les points :

$$A(1 + 2i), B(2) \text{ et } C(-1 + i).$$

- Placer ces points dans le plan complexe et conjecturer la nature du triangle ABC .
- Démontrer ou invalider votre conjecture.



Correction

2.2 Propriétés

Propriété 4 : Déjà vue dans la partie algébrique du cours

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ (x et y réels).

- $z = 0 \iff |z| = 0$
- $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$
- $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$

Propriété 5 : Déjà vue dans la partie algébrique du cours

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- Pour tout entier $n \geq 1$, $|z^n| = |z|^n$
- Si $z' \neq 0$, $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$
- Si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Méthode 6 : Déterminer un lieu géométrique

Déterminer dans le plan complexe, l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexe tels que :

- 1) $|z| = 1$
- 2) $|z - i| = 2$
- 3) $|z + 1 - i| = \sqrt{2}$
- 4) $|z + 1| = |z - 2 + i|$.



Correction

2.3 Ensemble \mathbb{U} des nombres complexes de module 1

Notation : L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté \mathbb{U} .

On a donc $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. L'ensemble des points images des éléments de \mathbb{U} est le cercle trigonométrique.

Propriété 6

Soient z et z' deux nombres complexes de l'ensemble \mathbb{U} .

- $z \times z' \in \mathbb{U}$
- $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$
- $\frac{z}{z'} \in \mathbb{U}$

Remarque 5

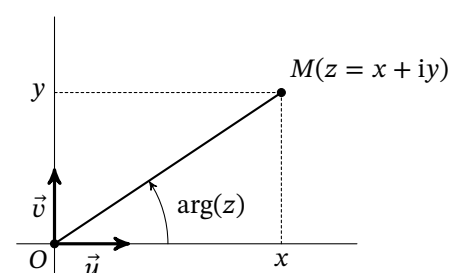
On dit que \mathbb{U} est stable par produit, passage à l'inverse et quotient.

3 Arguments d'un nombre complexe non nul

3.1 Définition et interprétation graphique

Définition 4

Soit z un nombre complexe non nul et soit M le point d'affixe z . On appelle **argument** de z et on note $\arg(z)$, une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.



Attention 1

0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'arguments.

Remarque 6

Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments. Si θ est l'un d'entre eux, les autres s'écrivent $\theta + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif et donc θ est unique à 2π près. On écrit parfois $\arg(z) = \theta (2\pi)$ ou $\arg(z) = \theta [2\pi]$.

Méthode 7 : Déterminer l'argument d'un nombre complexe (niveau 2).

À l'aide d'un dessin, déterminer un argument de $z_1 = i$, $z_2 = -5$, $z_3 = 1 + i$ et $z_4 = 3$.



Correction

Propriété 7

Soient A et B deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B .

On a alors $(\vec{u}; \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A) (2\pi)$

Méthode 8 : Déterminer un ensemble de points du plan complexe.

Dans le plan complexe, on considère les points $A(5 - 7i)$ et $B(6 - 8i)$.

a) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{AB})$.

b) Représenter l'ensemble \mathcal{E} des points M d'affixe z tels que $\arg(z + 2) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$



Correction

3.2 Propriétés

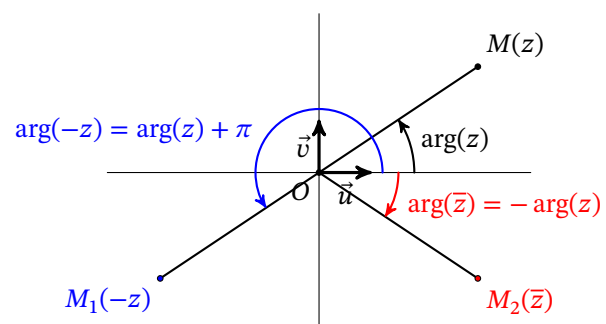
Propriété 8 : Propriétés des arguments

Soit z un nombre complexe non nul.

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi (2\pi)$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) (2\pi)$.
- z est un nombre réel si, et seulement si, $\arg(z) = 0 (2\pi)$ ou $\arg(z) = \pi (2\pi)$.
- z est un imaginaire pur si, et seulement si, $\arg(z) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$ ou $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$.

Remarque 7

Il suffit de connaître le dessin ci-contre pour retrouver la propriété :

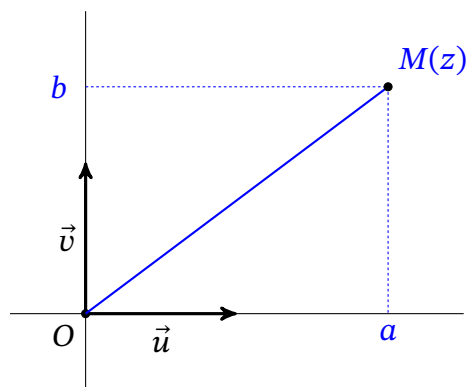


3.3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Propriété 9 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe

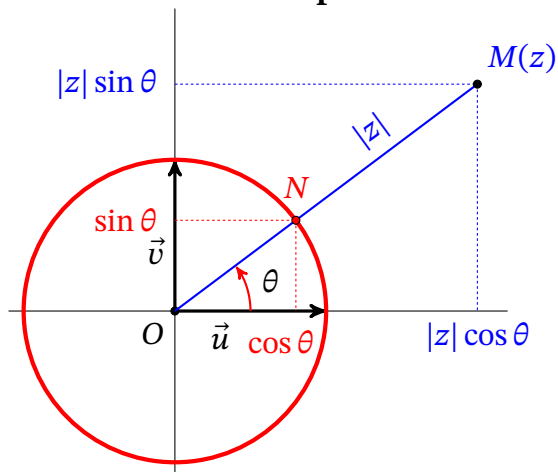
Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la forme $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ où θ est un argument de z , unique à 2π près.

Coordonnées cartésiennes :



$$z = a + ib$$

Coordonnées polaires :



$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Définition 5

L'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ est appelée **forme trigonométrique** de z .

Méthode 9 : Déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe.

A l'aide d'un dessin, déterminer une forme trigonométrique des nombres $z_1 = 2i$ et $z_2 = -3$.



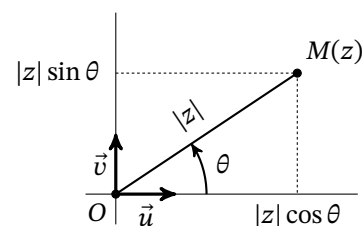
Correction

Propriété 10 : Détermination d'un argument :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = x + iy$ (x et y réels).

Un argument de z est un réel θ tel que :

$$\cos \theta = \frac{x}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{|z|}$$



Méthode 10 : Déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = 2\sqrt{3} - 2i.$$



Correction

Méthode 11 : Déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$

Déterminer la forme algébrique de z et placer le point image M de z dans le plan complexe.



Correction

Propriété 11

- Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont le même module et des arguments égaux à un multiple de 2π près.
- Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$.

Méthode 12 : Déterminer une forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Le nombre complexe $z = -3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$ est-il écrit sous forme trigonométrique ?
Si ce n'est pas le cas, l'écrire sous cette forme.



Correction