Parcours d'exercices

Les Matrices

3 ALGEBRE

1 Notion de matrices

Exercice 1

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & -3 \\ 2 & 6 & -8 & 0 \\ 7 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

1) Quelle est la dimension de la matrice A ?

2) Que valent $a_{1,2}$, $a_{3,3}$ et $a_{2,4}$?

Exercice 2

Écrire sous la forme d'un tableau de nombres la matrice 3×3 dont le coefficient (i, j) vaut i^j.

Exercice 3

Soit A une matrice de dimension $n \times p$.
On appelle transposée de A, notée A^T, la matrice de dimension $p \times n$ dont le coefficient (i, j) vaut $a_{j,i}$.

Déterminer la transposée de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ une matrice carrée de dimension n.
On appelle trace de A la somme des coefficients diagonaux de la matrice A.
On a donc $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
Déterminer la trace des matrices suivantes.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = (ij)_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$ $\quad C = I_n$

2 Opérations sur les matrices

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $A + B$, $3A - 2B$ et $\frac{2}{3}A + \frac{1}{4}B$.

Exercice 6

Effectuer les calculs suivants :

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1-2i & i & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2+3i \\ 1+i \\ i-5 \end{pmatrix}$

Exercice 7

On donne la matrice : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$

Déterminer le réel x pour que : $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

Exercice 8

Déterminer la valeur du réel x pour que $\begin{pmatrix} 3x & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ x \\ 3 \end{pmatrix} = (12)$.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Parmi les produits suivants, déterminer ceux qui ont un sens et donner leur résultat.

AB $\quad AC$ $\quad BC$ $\quad CA$ $\quad CB$
AD $\quad CD$ $\quad DC$ $\quad BD$ $\quad DB$

Exercice 10

Déterminer les valeurs des réels a, b, c et d pour que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 = 2A$ et en déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 12

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_2$.

1) Calculer B puis B^2

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = I_2 + nB$

Exercice 13

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 14

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et A^3.

2) Conjecturer une écriture de A^n en fonction de n.

3) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 15

Soit a, b et c trois réels et $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et A^3.

2) Conjecturer une écriture de A^n en fonction de n.

3) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 16

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2

2) Déterminer deux réels α et β tels que

$$A^2 + \alpha A + \beta I_3 = 0$$

Exercice 17

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0$.

3 Matrices inversibles

Exercice 18

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2.

2) Vérifier que $A^2 + A = 2I_3$

3) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 19

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, déterminer leur inverse :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 20

On considère les matrices

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que la matrice $\mathbf{P}$ est inversible puis déterminer $\mathbf{P}^{-1}$.

2) Montrer que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ est une matrice diagonale $\mathbf{D}$.

3) Déduire une expression de $\mathbf{A}^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21

On considère les matrices

$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -3 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) À l'aide de la calculatrice, donner $\mathbf{P}^{-1}$.

   On donnera les coefficients de $\mathbf{P}^{-1}$ sous forme de fraction.

2) Vérifier que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ est une matrice diagonale $\mathbf{D}$.

3) En déduire $\mathbf{A}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4 Systèmes d'équations

Exercice 22

Résoudre à l'aide d'un calcul matriciel les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ -2x + y = -5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -6x + 7y = -3 \\ 3x + 14y = -1 \end{cases}$

Exercice 23

1) Donner à l'aide de la calculatrice la matrice inverse de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) En déduire la résolution du système : $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$