

1 Composition de fonctions

Exercice 1

Soient u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = x^2$,
 v la fonction définie sur \mathbb{R} par $v(x) = 3x - 1$,
et w la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $w(x) = \sqrt{x}$.

- 1) Préciser l'ensemble de définition de $u \circ v$, puis déterminer explicitement $(u \circ v)(x)$.
- 2) Préciser l'ensemble de définition de $v \circ u$, puis déterminer explicitement $(v \circ u)(x)$.
- 3) Préciser l'ensemble de définition de $v \circ w$, puis déterminer explicitement $(v \circ w)(x)$.
- 4) Préciser l'ensemble de définition de $w \circ v$, puis déterminer explicitement $(w \circ v)(x)$.

2 Calculs de dérivées

Exercice 2

Dans chaque cas, donner le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée f' de la fonction f en cherchant à factoriser f' .

$$1) f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 1}{x - 2}$$

$$2) f(x) = \frac{1 - 2x}{x - 2}$$

$$3) f(x) = x - 6 + \frac{9}{x - 1}$$

$$4) f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 1}$$

$$5) f(x) = (x^2 + 2x - 3)^2$$

$$6) f(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^3$$

Exercice 3

Dans chaque cas, donner le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée f' de la fonction f en cherchant à factoriser f' .

$$1) f(x) = \sqrt{4 - x}$$

$$2) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$$

$$3) f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Exercice 4

Dans chaque cas, donner le domaine de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée f' de la fonction f .

$$1) f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

$$3) f(x) = xe^{-x}$$

$$5) f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

$$2) f(x) = e^{-x+2}$$

$$4) f(x) = e^{x^2-x}$$

$$6) f(x) = \cos 2x$$

Exercice 5

Dans chaque cas, la fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . Calculer $f''(x)$.

$$1) f : x \mapsto e^{3x^2+2}$$

$$2) f : x \mapsto x^3 + e^x$$

$$3) f : x \mapsto xe^x$$

$$4) f : x \mapsto e^{x^3-5}$$

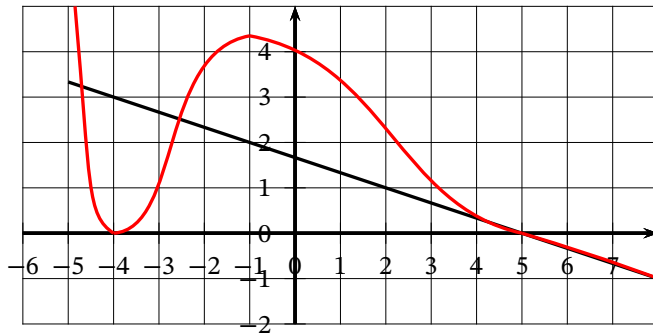
3 Équations de tangentes

Exercice 6

On se place dans un repère orthonormé du plan.

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative notée C d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

La droite D est tangente à la courbe C au point $A(5; 0)$.



Question 1

On note f' la dérivée de la fonction f , Alors $f'(5)$ est égal à :

a. 3	b. -3	c. $\frac{1}{3}$	d. $-\frac{1}{3}$
------	-------	------------------	-------------------

Question 2

Pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 0]$, on a :

a. $f'(x) \leq 0$	b. $f'(x) \geq 0$
c. $f(x) \geq 0$	d. $f'(x) \leq 0$

Exercice 7

Dans chacun des cas, écrire l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f de f au point d'abscisse indiqué.

1) $f(x) = x^3 + x^2 - 3x$ $a = 1$

2) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ $a = 2$

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x + 1}$$

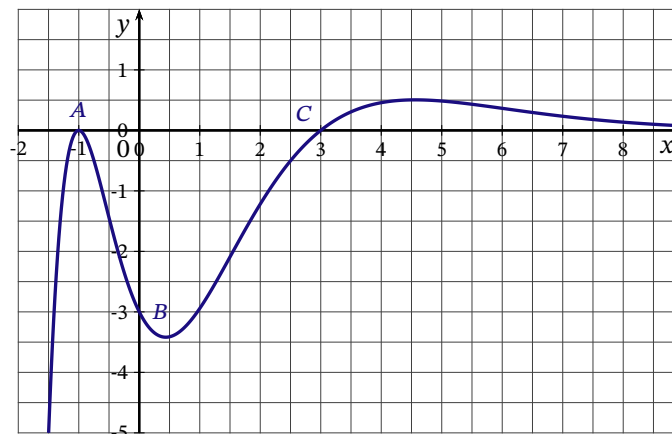
- Calculer les limites en -1 et en $+\infty$ et $-\infty$
- Calculer la fonction dérivée de la fonction f
- Dresser le tableau de variation de la fonction f . On calculera les valeurs approchées des extrémums de la fonction f à 10^{-2}
- Existe-t-il des tangentes à \mathcal{C}_f parallèles à la droite d'équation $y = -4x - 5$? Si oui, donner l'équation de cette ou ces tangente(s)
- Existe-t-il des tangentes à \mathcal{C}_f parallèles à la droite d'équation $3x - 2y = 0$? Si oui, donner l'équation de cette ou ces tangente(s)

4 Approche graphique de la convexité

Exercice 9

On considère une fonction f définie sur \mathbb{R} et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , dans un repère orthonormé.

Les points $A(-1; 0)$, $B(0; -3)$ et $C(3; 0)$ appartiennent à la courbe.

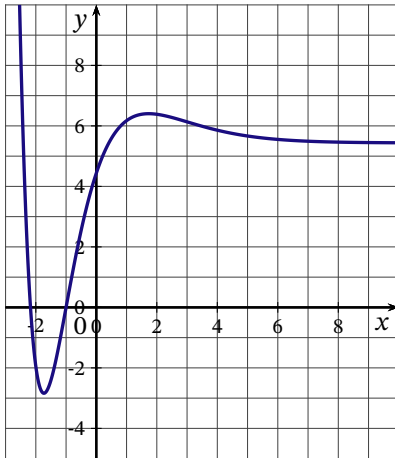


Dans cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

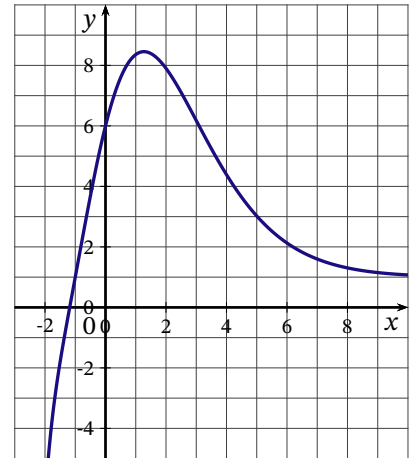
- La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion?
- Sur quels intervalles, la fonction est-elle convexe? Est-elle concave?

- 3) Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle? Justifier la réponse.

Courbe 1

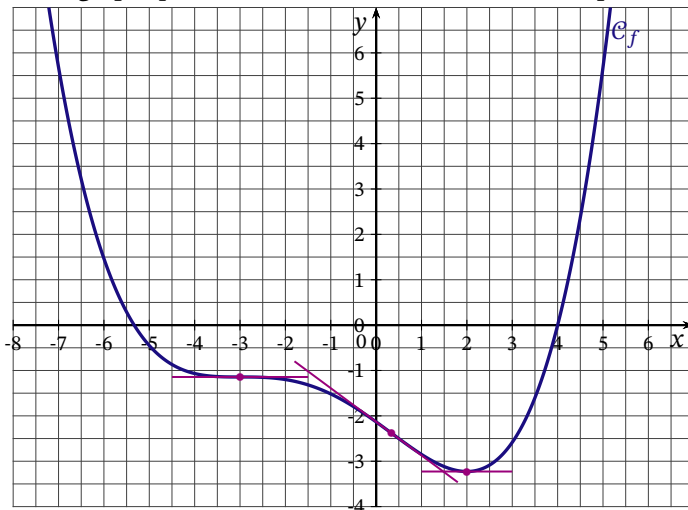


Courbe 2



Exercice 10

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .



On note f' la dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

À partir du graphique, déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles $<$, $=$ ou $>$ est approprié :

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| $f(-6) \dots 0$ | $f'(-6) \dots 0$ |
| $f(-1) \dots f(3)$ | $f'(-1) \dots f'(3)$ |
| $f'(-6) \dots f'(-1)$ | $f'(-3) \dots 0$ |
| $f'(2) \dots 0$ | $f'(-7) \dots f'(3)$ |
| $f''(-6) \dots f''(-1)$ | $f''(-3) \dots 0$ |
| $f''(2) \dots 0$ | $f''(-1) \dots f''(1)$ |

Exercice 11

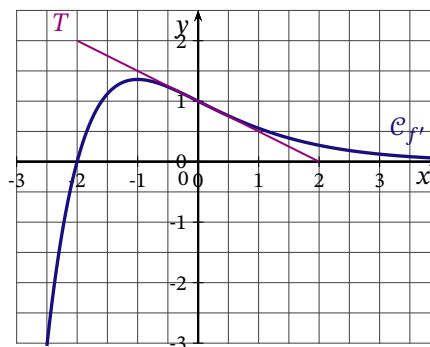
Soit f une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} . On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

La courbe représentative de la fonction dérivée notée $\mathcal{C}_{f'}$ est donnée ci dessous.

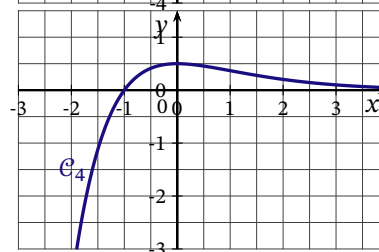
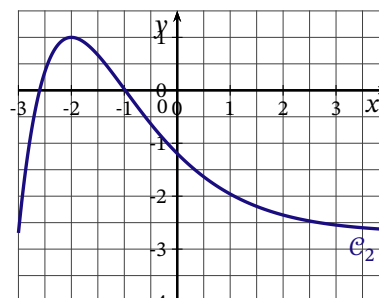
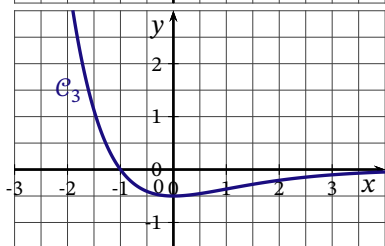
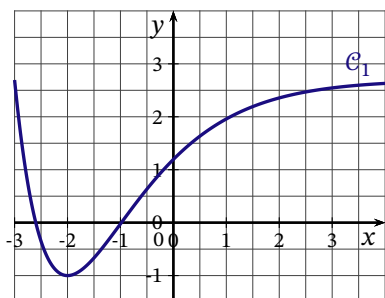
La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.

Par lecture graphique :

- 1)
 - a) Résoudre $f'(x) = 0$.
 - b) Résoudre $f''(x) = 0$.
 - c) Déterminer $f''(0)$.



- 2) Une des quatre courbes \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 et \mathcal{C}_4 ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f'' .



- Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente la dérivée seconde f'' .
- Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
- La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion?

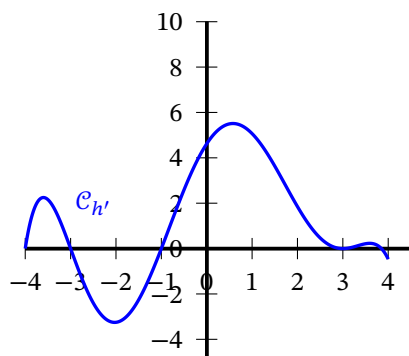
Exercice 12 : Bac Asie - Juin 2024

Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse.

Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$.

La représentation graphique $\mathcal{C}_{h'}$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-dessous.

Affirmation : La fonction h est convexe sur $[-1; 3]$.



Exercice 13

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-6; 5]$ dont on connaît le tableau de variations de la fonction dérivée f' .

x	-6	-2	1	2	5
f'	4		2	0	-2

- Dresser le tableau de variations de f sur $[-6; 5]$.
- Déterminer la convexité de la fonction f .

Exercice 14

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-8; 8]$ dont on connaît le tableau de variations de la fonction dérivée seconde f'' .

x	-8	-2	1	4	8
f''	-2	0	-3	0	1

- En déduire le signe de $f'(x)$ pour dresser le tableau de variations de la fonction dérivée f' sur $[-8; 8]$.
- En déduire la convexité de la fonction f et les abscisses des éventuels points d'inflexion.

5 Étude de la convexité

Exercice 15

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1.$$

Étudier la convexité de la fonction f sur \mathbb{R} .

Exercice 16

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = xe^{-x}$.

Étudier la convexité de la fonction g sur \mathbb{R} .

Exercice 17

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \frac{e^x}{x}$

- 1) Montrer que $f''(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3}$.
- 2) En déduire un point d'inflexion éventuel de la courbe \mathcal{C}_f .

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x^2 + 2)e^x$

- 1) Calculer f' puis f'' .
- 2) En déduire la convexité et d'éventuels points d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f .

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = xe^{x^2-1}$.

- a) Déterminer $f'(x)$.
En déduire la monotonie de f sur \mathbb{R} .
- b) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}.$$

Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

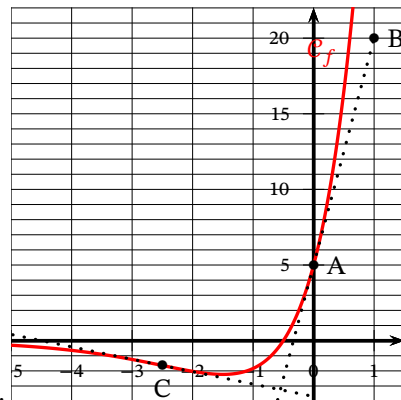
- c) Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = x - f(x).$$

On admet que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} > 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1, 1]$.

Déterminer le signe de $h(x)$ sur $[-1, 1]$ et en déduire la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la droite d d'équation $y = x$ sur $[-1, 1]$.

Que peut-on déduire sur la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0?



tion f .

- 1) On peut affirmer que :
 - a) $f'(-0, 5) = 0$
 - b) si $x \in]-\infty ; -0, 5[$, alors $f'(x) < 0$
 - c) $f''(0) = 15$
 - d) la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur \mathbb{R} .
- 2) On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (ax + b)e^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0, 5 ; 0)$.
On peut affirmer que :
 - a) $a = 10$ et $b = 5$
 - b) $a = 2, 5$ et $b = -0, 5$
 - c) $a = -1, 5$ et $b = 5$
 - d) $a = 0$ et $b = 5$
- 3) On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur \mathbb{R} par : $f''(x) = (10x + 25)e^x$.
On peut affirmer que :
 - a) La fonction f est convexe sur \mathbb{R}
 - b) La fonction f est concave sur \mathbb{R}
 - c) Le point C est l'unique point d'inflexion de \mathcal{C}_f
 - d) \mathcal{C}_f n'admet pas de point d'inflexion

6 Annales Bac

Exercice 20 : Bac Métropole - septembre 2021

Le graphique ci-contre donne la représentation graphique \mathcal{C}_f dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On notera f' la fonction dérivée de f .

On donne les points A de coordonnées $(0 ; 5)$ et B de coordonnées $(1 ; 20)$. Le point C est le point de la courbe \mathcal{C}_f ayant pour abscisse $-2, 5$. La droite (AB) est la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point A.

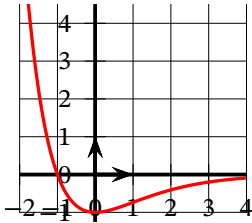
Les questions 1 à 3 se rapportent à cette même fonc-

Exercice 21 : Métropole - Juin 2021**Partie 1**

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} .

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

- 1) Le sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .
- 2) La convexité de la fonction f sur \mathbb{R} .

**Partie 2**

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; i, j)$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

- 1) Montrer que, pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Justifier que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- 2) a) Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$.
 - b) Étudier les variations sur \mathbb{R} de la fonction f et dresser son tableau de variations.
- 3) Déterminer, pour tout nombre réel x , l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f .
Que représente pour la courbe \mathcal{C} son point A d'abscisse 0?

Exercice 22 : Amérique du Nord - Mars 2023

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{3x} - (2x + 1)e^x$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur \mathbb{R} .

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$$

- 1) a) Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.
b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
- 2) a) On admet que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} , et on note g' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $g'(x) = 6e^{2x} - 2$.
b) Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur \mathbb{R} .
c) En déduire le tableau de variations de la fonction g sur \mathbb{R} . Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3) - 2$.
- 3) a) Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.
b) (Question bonus, il manque un théorème pour y répondre) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α , dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1} .
- 4) Déduire des questions précédentes le signe de la fonction g sur \mathbb{R} .

Partie B - Étude de la fonction f

- 1) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , et on note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout nombre réel x , on a $f'(x) = e^x g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie A**.
- 2) En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
- 3) Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur \mathbb{R} ? Expliquer.