Parcours d'exercices

Continuité et TVI

5 ANALYSE

1 Continuité d'une fonction

Exercice 1

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 6x+8 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -3x+7 & \text{si } -1 < x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

f est-elle continue en -1 ? et en 2 ?

Exercice 2

On considère la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x-3 & \text{si } x \leqslant -2 \\ x+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

définie sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que la fonction f n'est pas continue en -2.
2) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

Exercice 3

Soit a et b deux réels. On considère la fonction f : $x \mapsto \begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2+ax+b & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(0) = 0$ et, pour tout réel non nul x, $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Suites et fonction continue

Exercice 5

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4n^2+1}{n^2+3n+2}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(\dfrac{1}{n}\right)$, en énonçant bien les propriétés utilisées.

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(0) = 1$ et pour tout réel non nul x, $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \dfrac{1}{2n\pi}$.

1) Que vaut $f(u_n)$ pour tout entier naturel n ?
2) Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ et $f(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n)$. La fonction f est-elle continue en 0 ?

Exercice 7

On considère la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{3}{u_n+1} + 3$

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ et que la suite (u_n) est croissante.
2) En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$

1) Supposons que (u_n) converge : quelle peut-être sa limite ?
2) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ et que la suite (u_n) est croissante.
3) Que peut-on en déduire sur la convergence de la suite (u_n) ?

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 9

Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = e^x \dfrac{1}{x}$.

1) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(1)$ et $f(2)$.
2) En déduire que l'équation $f(x) = 2$ possède au moins une solution sur l'intervalle $[1;2]$.

Exercice 10 : Bac 2021 – Amérique du Nord

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.
Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.
Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par par $u_0 = 0,6$ Pour tout entier

naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n(1 - 0.15u_n$.
où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1) Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 0,75x(1 - 0.15x)$

2) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;1]$ et dresser son tableau de variations.
3) Résoudre dans l'intervalle $[0,1]$ l'équation $f(x) = x$.
4) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
5) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer la limite de la suite (u_n).
6) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison de penser que l'espèce sera menacée d'extinction.
7) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction menace(), donner la valeur renvoyée et interpréter.

Exercice 11

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x + x$, définie sur $\mathbb{R}$.

1) Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
2) Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[-1;0]$?
3) Que vaut $f(0)$? Quel est le signe de $f(-1)$?
4) En déduire que l'équation $e^x + x = 0$ admet exactement une solution sur $[-1;1]$.

Exercice 12

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 9x^2 - 60x + 3$, définie sur $\mathbb{R}$.

1) Étudier les variations de la fonction f.
2) En déduire la nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^5 - 2x - 4$.

1) Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
2) En déduire que l'équation $x^5 - 2x - 4 = 0$ possède au moins une solution sur $[1;2]$.
3) Écrire les 3 premières étapes de l'algorithme de dichotomie et donner un intervalle de longueur $\frac{1}{8}$ qui contient une solution de l'équation $x^5 - 2x - 4 = 0$.
4) Donner une solution de cette équation au centième près.

Exercice 14

Soit f et g les fonction définies pour tout réel x par $f(x) = (1-x)e^x + 1$ et $g(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$

1) Construire le tableau de variations de f en y incluant les limites.
2) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et en donner une valeur à 10^{-2} près. On note α ce réel.
3) Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{(1+e^x)^2}$
4) Construire le tableau de variations de g.

Exercice 15

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout réel $x \in [0;1]$, on a $f(x) \in [0;1]$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0;1]$.

Synthèse

Exercice 16 : Bac 2023 – Centres étrangers

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = e^3 - e^{-0.5t^2+t+2}$, où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.
À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous. Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».
- **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera 21 000 bactéries ».
- **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de 10 000 à deux reprises au cours du temps ».

Exercice 17 : Bac 2023 - Polynésie

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + x.$$

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

b) En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

c) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

d) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

e) Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

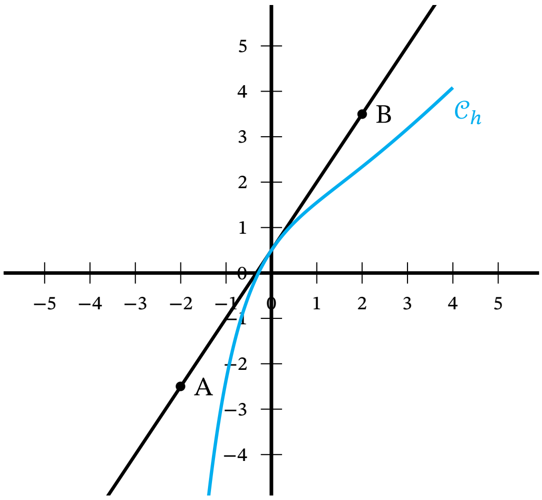
Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2\,;\,-2,5)$ et $(2\,;\,3,5)$.



1) Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.

2) Sachant que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde d'expression

$$h''(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}.$$

valider ou non la conjecture précédente.

3) Déterminer une équation de la droite (AB).

4) Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b.

Exercice 18 : Bac 2024 - Centres étrangers

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) a) Déterminer la limite de la fonction f en 1.
   b) En déduire une interprétation graphique.
2) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3) a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a $f'(x)=\dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$.
   b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
4) On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]]-\infty\,;\,1[$, on a
   $f''(x)=\dfrac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}$.
   a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   c) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a :
   $\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1)$.
5) a) Justifier que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Correction

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

Continuité en -1 ? : D'une part, $f(-1) = 6 \times (-1) + 8 = 2$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = -3 \times (-1) + 7 = 10$

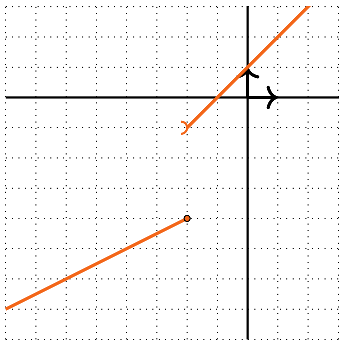
Ainsi, f n'est pas continue en -1.

Continuité en 2 ? : D'une part, $f(2) = 2 - 1 = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to 2^-} = -3 \times 2 + 7 = 1$. Enfin, $\lim\limits_{x \to 2^+} = 2 - 1 = 1$

La fonction f est continue en 2.

Corrigé de l'exercice 2

$f(-2) = \dfrac{1}{2} \times (-2) - 3 = -4$. Or, $\lim\limits_{x \to (-2)^+} = -2 + 1 = -1$. La fonction f n'est pas continue en -2.



Corrigé de l'exercice 3

f est continue sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$. Il reste à déterminer si elle est continue en 1.

- $f(1) = 1^2 + a \times 1 + b = 1 + a + b$
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a \times 1^2 + b \times 1 + 1 = a + b + 1$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 + a + b$

Ainsi, f est continue en 1. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 4

On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$. Or, $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$. De la même manière, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$. f est donc continue en 0.

Corrigé de l'exercice 5

Pour tout entier naturel non nul n,

$$\frac{4n^2 + 1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{4 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{4 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}.$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = 4$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 4.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{4 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \sqrt{4} = 2$.

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. De plus, la fonction exponentielle est continue en 0.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \exp\left(\dfrac{1}{n}\right) = e^0 = 1$.

Corrigé de l'exercice 6

Pour tout entier naturel n, $f(u_n = \sin\left(\dfrac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \sin(2n\pi) = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = 0$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $f(0) = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) \neq f(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n)$: f n'est pas continue en 0.

Corrigé de l'exercice 7

Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

- $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et on a bien $1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Ainsi, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. D'où $2 \leqslant u_n + 1 \leqslant u_{n+1} + 1 \leqslant 3$.
  La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a alors, $\dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{1}{u_n+1} \geqslant \dfrac{1}{u_{n+1}+1} \geqslant \dfrac{1}{3}$, puis, en multipliant par -3 qui est négatif, $\dfrac{-3}{2} \leqslant -\dfrac{3}{u_n+1} \leqslant -\dfrac{3}{u_{n+1}+1} \leqslant -1$
  Finalement, on a $\dfrac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$. En particulier, puisque $\dfrac{3}{2} > 1$, on a $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$.
  $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) étant croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.
La fonction $f : x \mapsto -\dfrac{3}{x+1} + 3$ est continue sur $]-1;+\infty[$ et, pour tout entier naturel n, on a bien $u_n \in]-1;+\infty[$. Ainsi, la limite l de la suite (u_n) vérifie $f(l) = l$, c'est-à-dire $l = -\dfrac{3}{l+1} + 3$.
Ainsi, on trouve $\dfrac{l(2-l)}{l+1} = 0$ et donc $l = 0$ ou $l = 2$. Puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$, le cas $l = 0$ est impossible. On a donc $l = 2$.

Corrigé de l'exercice 8

Si (u_n) converge vers un réel l, puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{6+x}$ est continue sur $[-6;+\infty[$, ce réel l vérifie $l = \sqrt{6+l}$. Ainsi, $l^2 = 6 + l$ ou encore $l^2 - l - 6 = 0$. On trouve alors deux solutions qui sont $l = -2$ et $l = 3$.
Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

- $u_1 = \sqrt{6+0} = \sqrt{6}$. On a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit n un entier naturel tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Ainsi, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
  Alors, $6 \leqslant 6+u_n \leqslant 6+u_{n+1} \leqslant 9$. Par ailleurs, la fonction Racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sqrt{6} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+3} \leqslant 3$.
  Or, puisque $\sqrt{6} \geqslant 0$, on a bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
- $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente. De plus, elle n'a que deux limites possibles qui sont -2 et 3. -2 est impossible puisque pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Corrigé de l'exercice 9

On a $f(1) \approx 1.7$ et $f(2) \approx 6.9$.
De plus, f est continue sur $[1;2]$. Comme $2 \in [f(1), f(2)]$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit qu'il existe au moins une solution de l'équation $f(x) = 2$ dans l'intervalle $[1;2]$.

Corrigé de l'exercice 10

1) On a $u_1 = 0.75 \times 0.6 \times (1 - 0.75 \times 0.6) = 0.4095$ et $u_2 = 0.75 \times 0.4095 \times (1 - 0.75 \times 0.4095) \simeq 0.2882$. Ainsi, il y aura environ 410 individus en 2021 et 288 en 2022.
2) La fonction f est dérivable sur $[0;1]$ et pour tout réel $x \in [0;1]$, $f'(x) = 0.75(1 - 0.15x)$. Le calcul montre que f est strictement croissante sur $[0;1]$.

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
f	$0 \nearrow$	0.6375

3) On résout $f(x) = x$ en résolvant $0.75x(1 - 0.15x) = x$. En factorisant, on trouve que l'unique solution dans $[0;1]$ est $x = 0$.
4) Pour tout n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Par récurrence, on montre que la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0.
5) Le calcul de la fonction menace() renvoie 11. Ce résultat signifie que l'espèce sera menacée d'extinction au bout de 11 années, soit en 2031.

Corrigé de l'exercice 11

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions exponentielles et polynomiales. Pour tout x, on a $f'(x) = e^x + 1$, qui est toujours positive, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle est strictement croissante sur $[-1; 0]$.

On calcule $f(0) = 1$ et $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur $[-1; 0]$.

Corrigé de l'exercice 12

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a $f'(x) = 6x^2 + 18x - 60 = 6(x^2 + 3x - 10)$. En résolvant l'équation $f'(x) = 0$, on obtient $x = 2$ et $x = -5$. On peut maintenant dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	278	$\searrow$	-65	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction est donc strictement croissante sur $]-\infty; -5]$ et $[2; +\infty[$, et décroissante sur $[-5; 2]$.

Pour déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$, on applique le théorème des valeurs intermédiaires. Sur $]-\infty; -5]$, f est strictement croissante et change de signe : il existe une solution dans cet intervalle. De même, sur $]-5; 2]$ et $[2; +\infty]$, la fonction change de signe, donc l'équation admet une solution dans chacun de ces intervalles. Au total, il y a trois solutions.

Corrigé de l'exercice 13

1) On a $f(1) = 1^5 - 2 \times 1 - 4 = -5$ et $f(2) = 2^5 - 2 \times 2 - 4 = 24 - 4 - 4 = 16$.
2) La fonction f est continue sur $[1, 2]$, et comme $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution $c \in [1; 2]$ telle que $f(c) = 0$.
3) La méthode de dichotomie consiste à diviser l'intervalle en deux, et à tester la valeur au milieu de l'intervalle. Les premières étapes sont :
   - Calculer $f(1.5) \simeq -0.59$, donc la solution est dans $[1.5; 2]$.
   - Calculer $f(1.75) \simeq 6.66$, donc la solution est dans $[1.5; 1.75]$.
   - Calculer $f(1.625) \simeq 2.72$, donc la solution est dans $[1.5; 1.625]$.

   L'intervalle de longueur $\frac{1}{8}$ contenant la solution est donc $[1.5; 1.625]$.
4) En poursuivant l'algorithme, on trouve une solution approchée à 1.52.

Corrigé de l'exercice 14

1) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x)e^x = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
   Par ailleurs, pour tout réel x, $f(x) = e^x - xe^x + 1$. Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} = 1$
   f est par ailleurs dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (-1) \times e^x + (1 - x)e^x = -xe^x$, qui est donc du signe de $-x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

2) Pour tout réel $x < 0$, $f'(x) > 1$ et en particulier, $f'(x) > 0$. Par ailleurs, f est continue sur $[0; +\infty[$ et $0 \in]-\infty; 2]$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $f(\alpha) = 0$. De plus, la fonction f étant strictement décroissante sur $[0; +\infty[$, un tel réel est unique. En utilisant la calculatrice, on trouve $x \simeq 1.28$

3) Pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{1 \times (e^x + 1) - x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \dfrac{(1-x)e^x + 1}{(e^x+1)^2} = \dfrac{f(x)}{(1+e^x)^2}$

4) Puisque pour tout réel x, $(1+e^x)^2 > 0$, $g'(x)$ est du signe de f.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$		$\searrow$	

Corrigé de l'exercice 15

Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[0;1]$. De plus, $g(0) = f(0) - 0 \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ puisque $f(1) \in [0;1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in [0;1]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) - c = 0$ ou encore $f(c) = c$.

Corrigé de l'exercice 16

- **Faux** : En étudiant la dérivée de f, on constate que la population n'augmente pas en permanence. Il existe une valeur de t à partir de laquelle la population décroît.
- **Faux** : À long terme, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = e^3 \simeq 20000$. La population ne dépassera donc pas 21 000 bactéries.
- **Vrai** : En résolvant l'équation $f(t) = 10$, on trouve deux solutions, indiquant que la population atteindra 10 000 bactéries à deux reprises.

Corrigé de l'exercice 17

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)e^{-x} + x$.

1) On détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   - Limite en $-\infty$

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right) = -\infty \\ &\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \end{aligned}\right\} \lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-x} = -\infty \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty \end{aligned}\right\} \text{donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

   - Limite en $+\infty$

$f(x) = xe^{-x} + \dfrac{1}{2}e^{-x} + x$. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et que

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \\ &\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}e^{-x} = 0 \\ &\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \end{aligned}\right\} \text{donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)e^{-x} + x$ donc

   $f'(x) = 1 \times e^{-x} + \left(x+\dfrac{1}{2}\right) \times (-1)e^{-x} + 1 = \left(-x+\dfrac{1}{2}\right)e^{-x} + 1$, et donc

   $f''(x) = -1 \times e^{-x} + \left(-x+\dfrac{1}{2}\right) \times (-1)e^{-x} = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)e^{-x}$.

   b) Le signe de f'' donne les variations de f'.

   Pour tout x, $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

   - Si $x < \dfrac{3}{2}$, $f''(x) < 0$ donc f' est décroissante ;
   - Si $x > \dfrac{3}{2}$, $f''(x) > 0$ donc f' est croissante ;

- Si $x = \frac{3}{2}$, $f''(x) = 0$ donc f' admet un minimum égal à
$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

c) La fonction f' admet pour minimum
$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \approx 0,78 > 0$; donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

d)
- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

e) On appelle α la solution de l'équation $f(x) = 0$.
$\left.\begin{array}{l} f(-0,286) \approx -0,001 < 0 \\ f(-0,285) \approx 0,0009 > 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in \left[-0,286\ ;\ -0,285\right]$
Donc $-0,285$ est une valeur approchée à 10^{-3} de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

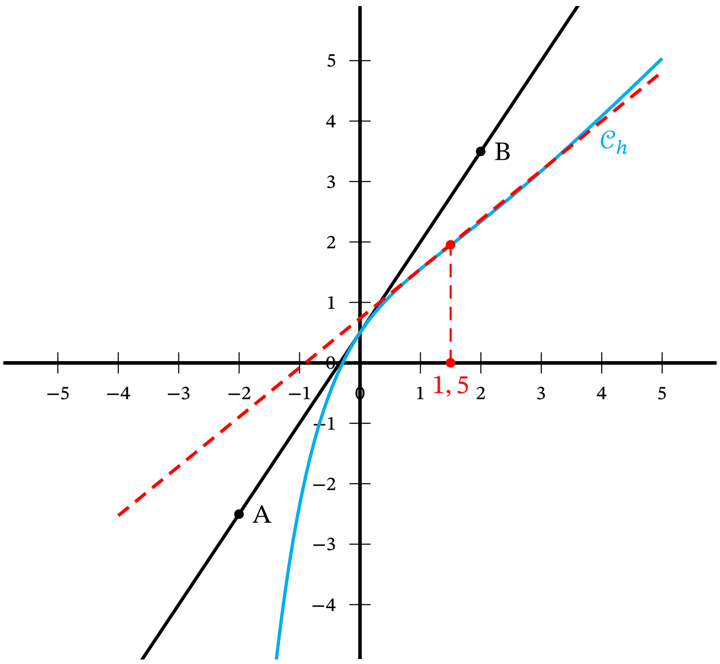
Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2\ ;\ -2,5)$ et $(2\ ;\ 3,5)$.



1) Avec la précision permise par le graphique, on peut conjecturer que la courbe représentative de la fonction h admet un unique point d'inflexion d'abscisse 1, 5.

2) On admet que $h''(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$.
$h''(x) = 0 \iff -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} = 0 \iff x - \frac{3}{2} = 0 \iff x = 1,5$
La conjecture est donc vérifiée.

3) Déterminer une équation de la droite (AB) c'est chercher l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ y)$ tels que : $\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \iff \frac{y+2,5}{x+2}=\frac{3,5+2,5}{2+2} \iff \frac{y+2,5}{x+2}=\frac{6}{4} \iff y+2,5=\frac{6}{4}(x+2)$$
$$\iff y=\frac{3}{2}x+3-2,5 \iff y=1,5x+0,5$$

La droite (AB) a pour équation : $y=1,5x+0,5$.

4) La droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, donc $h'(0)=1,5$.

$h'(x)=a\times \mathrm{e}^{-x}+(ax+b)\times(-1)\mathrm{e}^{-x}+1=(-ax+a-b)\mathrm{e}^{-x}+1$

$h'(0)=1,5 \iff (a-b)\mathrm{e}^{0}+1=1,5 \iff a-b=0,5$

La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 0, 5 donc $h(0)=0,5$.

$h(0)=0,5 \iff (0+b)\mathrm{e}^{0}+0=0,5 \iff b=0,5$

Comme $a-b=0,5$, on en déduit que $a=1$.

Donc $h(x)=(x+0,5)\mathrm{e}^{-x}+x=f(x)$.

Corrigé de l'exercice 18

1) a) La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc : $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{1}=\mathrm{e}>0$.

Par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{x\to 1} x-1=0$, et comme on travaille sur $]-\infty\,;\,1[$, on a $x-1<0$. (on peut noter $\lim\limits_{x\to 1} x-1=0^{-}$).

Par limite du quotient, on a : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$.

b) On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale, d'équation $x=1$.

2) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x}=0$;

Par limite de la somme, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty$,

Par limite du quotient, on en déduit : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet également une asymptote, d'équation $y=0$, au voisinage de $-\infty$.

3) a) f est dérivable sur $]-\infty\,;\,1[$, en tant que quotient de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle, avec la fonction au dénominateur ne s'annulant pas sur l'intervalle.

$$\forall x\in]-\infty\,;\,1[,\quad f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}\times(x-1)-\mathrm{e}^{x}\times 1}{(x-1)^2}=\frac{\mathrm{e}^{x}\times(x-1-1)}{(x-1)^2}=\frac{(x-2)\mathrm{e}^{x}}{(x-1)^2}$$

b) La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, et pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, $(x-1)^2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $(x-2)$.

$x-2\geqslant 0 \iff x\geqslant 2$, donc sur $]-\infty\,;\,1[$, $(x-2)$ est strictement négatif, donc $f'(x)$ également.

Finalement, on peut donc en déduire que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$, et donc, on a le tableau de variations suivant (avec les limites justifiées aux questions **1. a.** et **2.**) :

x	$-\infty$	1
signe de $f'(x)$	$-$	‖
variations de f	$0 \searrow -\infty$	‖

4) a) Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on va étudier le signe de $f''(x)$.

Comme, pour tout x dans $]-\infty\,;\,1[$, on a $(x-1)<0$ et donc $(x-1)^3<0$ et $\mathrm{e}^{x}>0$, on en déduit que le signe de $f''(x)$ est l'opposé du signe du trinôme : x^2-4x+5.

Or, ce trinôme a un discriminant $\Delta=(-4)^2-4\times1\times5=-4$ qui est strictement négatif, donc n'admet pas de racine, et donne des images strictement positives (car le coefficient dominant est positif) pour tout réel x.

Rem. On peut écrire :

$x^2-4x+5=(x-2)^2-4+5=(x-2)^2+1\geqslant 1>0$: le trinôme est positif quel que soit $x\in\mathbb{R}$.

Finalement, la dérivée seconde f'' est à valeurs strictement négatives sur $]-\infty\ ;\ 1[$, on en déduit que la fonction f est concave sur $]-\infty\ ;\ 1[$.

b) Pour déterminer l'équation de T, il nous faut connaître $f'(0)$ et $f(0)$:

- $f'(0) = \dfrac{(0-2)\mathrm{e}^0}{(0-1)^2} = \dfrac{-2}{1} = -2$;
- $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{0-1} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

La formule classique donne une équation pour T :

$y = f'(0)(x-0) + f(0) \iff y = -2x - 1$

L'équation réduite de T est donc : $y = -2x - 1$.

c) Puisque f est concave sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, la courbe $\mathcal{C}$ est donc située sous ses tangentes, notamment sous la tangente T, sur cet intervalle.

Pour tout réel x dans cet intervalle, l'ordonnée d'un point sur la courbe $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire $f(x)$) est donc inférieure ou égale à l'ordonnée du point ayant la même abscisse sur la tangente T (or, sur la tangente T, l'ordonnée du point d'abscisse x est $-2x-1$, d'après la question précédente).

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} x \in]-\infty\ ;\ 1[&\implies f(x) \leqslant -2x-1 \\ &\implies \frac{\mathrm{e}^x}{x-1} \leqslant -2x-1 \\ &\implies \mathrm{e}^x \geqslant (x-1)(-2x-1) \\ &\qquad \text{car sur }]-\infty\ ;\ 1[,\quad x-1<0 \\ &\implies \mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1) \end{aligned}$$

On arrive donc à l'inégalité demandée.

5) a) La fonction f est :

- continue sur $]-\infty\ ;\ 1[$ (car dérivable sur cet intervalle) ;
- strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 1[$ (d'après la question **3. b.**) ;
- telle que -2 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{1} f = -\infty$;

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.

b) Comme on a repéré à la question **4. b.** que $f(0) = -1$, on sait que la solution sera à chercher dans l'intervalle $]0\ ;\ 1[$.

À l'aide de la calculatrice, par balayage, on a :

- $f(0,31) \approx -1,98 > -2$;
- $f(0,32) \approx -2,03 < -2$;

Un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est $0,31 < \alpha < 0,32$.