Plab de travail

Loi Binomiale

6

Probabilités

1 Variable aléatoire

Exercice 1

On définit une variable aléatoire Y avec la règle de jeu suivante :

- Un joueur gagne 8 € pour trois « pile » successifs.
- Il ne gagne rien s'il obtient deux « pile » .
- Il perd 2 € dans tous les autres cas.

1) Déterminer les valeurs prises par Y
2) Déterminer les issues correspondant à l'événement $Y = -2$.
   En déduire $p(Y = -2)$
3) Déterminer $p(Y \geqslant 0)$

Exercice 2

Maxime participe à un jeu qui se déroule en deux parties :

- La probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,2.
- S'il gagne la première partie, il gagne la deuxième avec une probabilité de 0,9.
- S'il perd la première partie, il perd la suivante avec une probabilité de 0,6.

On note :

- G_1 l'évènement « Maxime gagne la première partie »
- G_2 l'évènement « Maxime gagne la première partie »

Partie A

1) Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2) Calculer la probabilité que Maxime gagne les deux parties du jeu.
3) Montrer que la probabilité que Maxime gagne la deuxième partie du jeu est 0, 5.

Partie B

On sait de plus que :

- à chaque partie gagnée, le joueur gagne 1, 50 €.
- à chaque partie perdue, il perd 1 €.

On note X la variable aléatoire qui correspond au gain algébrique en euros de Maxime à l'issue des deux parties.

1) Recopier sur la copie et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X = x_i$			3	Total
$p(X = x_i)$			0,18	

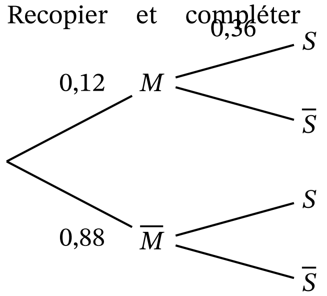
2) Déterminer si ce jeu est équitable. Justifier.

2 Probabilités conditionnelles

Exercice 3

Au cours de l'hiver, on observe dans une population, 12 % de personnes malades.
Parmi les personnes malades, 36 % d'entre elles pratiquent une activité sportive régulièrement.
Parmi les personnes non malades, 54 % d'entre elles pratiquent une activité sportive régulièrement.
Une personne est choisie au hasard dans la population.
On note M l'évènement « la personne est malade » et S l'évènement « la personne a une activité sportive régulière ».

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré :

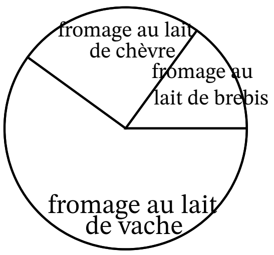


2) a) Quelle est la probabilité que la personne soit malade et qu'elle pratique une activité sportive régulièrement ?
   b) Montrer que la probabilité que la personne pratique une activité sportive régulièrement est égale à 0,5184.
3) La personne choisie n'a pas d'activité sportive régulière. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit malade ?
4) Un journaliste annonce qu'une pratique régulière d'une activité sportive diminue par deux le risque de tomber malade. Que peut-on conclure sur la pertinence de cette annonce ? Justifier.

Exercice 4

Un fromager fait l'inventaire des produits qu'il a en cave.
Le graphique ci-dessous indique la répartition de ses trois types de fromages : au lait de chèvre, au lait de vache ou au lait de brebis.

Répartition des types de fromage



Chacun de ses trois types de fromages se partage en deux catégories : frais ou affiné. Le tableau suivant donne la répartition des fromages de chaque catégorie suivant leur affinage :

	frais	affiné
Lait de vache	20 %	80 %
Lait de chèvre	40 %	60 %
Lait de brebis	70 %	30 %

Le fromager prend un fromage au hasard. On note les évènements suivants :

- V : « le fromage est fait avec du lait de vache » ;
- C : « le fromage est fait avec du lait de chèvre » ;
- B : « le fromage est fait avec du lait de brebis » ;
- F : « le fromage est frais » ;
- A : « le fromage est affiné ».

1) Donner les probabilités $P_C(A)$ et $P(B)$.
2) Démontrer que $P(A) = 0,675$.
3) Le fromager prend au hasard un fromage affiné. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un fromage au lait de vache ? On donnera le résultat à 10^{-3} près.

3 Épreuve de Bernoulli

Exercice 5

Dans un lycée, il y a 11 professeurs de mathématiques parmi les 100 professeurs. On tire au sort un professeur parmi ces 100 et on considère la variable aléatoire M donnant le nombre de professeurs de mathématiques obtenu.
1. Justifier que M suit une loi de Bernoulli et donner son paramètre p.
2. Donner l'espérance de M.

Exercice 6

On lance 3 fois successivement une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir PILE est 0,75 et on s'intéresse au nombre de PILE obtenus.
1. Justifier que l'on peut associer la situation de l'énoncé à un schéma de Bernoulli dont on précisera n le nombre de répétitions et p, la probabilité d'un succès.
2. Représenter ce schéma de Bernoulli par un arbre.
3. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois PILE.

Exercice 7

Sylvain joue 3 fois de suite à un jeu vidéo sur son téléphone pour lequel sa probabilité de succès est $0,1$.
1. Quelle hypothèse doit-on faire sur chaque partie pour que ces 3 parties soient assimilables à un schéma de Bernoulli ?
2. Quelle est la probabilité qu'il perde ces 3 parties ?

4 Loi binomiale

Exercice 8

On tire 15 cartes avec remise dans un jeu de 52 cartes et on considère la variable aléatoire T qui donne le nombre de «trêfle » obtenus.
1. Justifier que T suit une loi binomiale.
2. Calculer $p(T = 5)$.

Exercice 9

On lance cinq fois de suite de façon indépendante une pièce de monnaie et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de « face » obtenu.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2) Calculer la probabilité
   a) d'obtenir exactement trois fois « face ».
   b) de n'obtenir aucune fois « face ».
   c) d'obtenir au moins une fois « face ».

Exercice 10

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,78$. Calculer avec la calculatrice :
a) $p(X < 75)$ b) $p(X > 79)$
c) $p(X \geqslant 74)$ d) $p(73 < X \leqslant 81)$

Exercice 11

Dans une fabrication d'objets en série, 8 % de ces objets présentent un défaut. Un carton contient 10 objets. La présence d'un défaut pour un objet est indépendante de l'objet choisi.

1) Calculer la probabilité que, dans le carton, les dix objets soient sans défaut.
2) Calculer la probabilité que, dans le carton, au moins 8 objets soient sans défaut.

Exercice 12

Un vendeur est chargé de démarcher des clients au téléphone. Il téléphone à 10 personnes par jour. On admet que la probabilité qu'une personne passe commande est de $\frac{1}{15}$ et que les décisions des personnes contactées sont indépendantes. X est le nombre de personnes qui passent commande en une journée.

1) Exprimer $p(X = k)$ en fonction de k (pour k entier compris entre 0 et 10).
2) Calculer l'espérance de X.
3) Le vendeur gagne 100 euros par commande passée. Quel gain moyen le vendeur peut-il espérer ?

Exercice 13

Vous jouez avec un ami de même force que vous à un jeu. Les résultats de deux parties sont indépendants. Qu'est-ce qui est le plus probable :

- « gagner deux parties sur quatre »
- « gagner quatre parties sur huit »

Exercice 14

On tire 15 cartes avec remise dans un jeu de 52 cartes et on considère la variable aléatoire T qui donne le nombre de «trèfle » obtenus.
1. Justifier que T suit une loi binomiale.
2. Calculer $p(T = 5)$.

Exercice 15 : Sujet Bac Polynésie Septembre 2024

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.
On choisit un acheteur au hasard et on considère les évènements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

1) Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.
   On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2) Démontrer que $P(B) = 0,658$.
3) Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?
4) On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.
   a) Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   b) Calculer $P(X = 8)$.
   c) Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.
   d) Calculer l'espérance de X.
   e) La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1200 €.
      En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ?

Exercice 16 : Sujet Bac Polynésie Juin 2024

Un sondage réalisé en France fournit les informations suivantes :

- 60 % des plus de 15 ans ont l'intention de regarder les jeux Olympiques et Paralympiques (JOP) de Paris 2024 à la télévision ;
- parmi ceux qui ont l'intention de regarder les JOP, 8 personnes sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

On choisit au hasard une personne de plus de 15 ans. On considère les évènements suivants :

- J : « la personne a l'intention de regarder les JOP Paris 2024 à la télévision » ;
- S : « la personne choisie déclare pratiquer une activité sportive régulière ».

On note $\overline{J}$ et $\overline{S}$ leurs évènements contraires.

Dans les questions 1. et 2., les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

1) Démontrer que la probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est de $\dfrac{8}{15}$.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

Selon ce sondage, deux personnes sur trois parmi les plus de 15 ans déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

2) a) Calculer la probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière.
   b) En déduire la probabilité de S sachant $\overline{J}$ notée $P_{\overline{J}}(S)$.

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

3) Dans le cadre d'une opération de promotion, 30 personnes de plus de 15 ans sont choisies au hasard.
   On assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.
   a) Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   b) Calculer la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.
   c) La fédération française de judo souhaite offrir une place pour la finale de l'épreuve par équipe mixte de judo à l'Arena Champ-de-Mars pour chaque personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi ces 30 personnes.
      Le prix d'une place s'élève à 380 € et on dispose d'un budget de 10000 euros pour cette opération.
      Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant ?

Exercice 17 : Sujet Bac Juin Asie 2024

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7 % des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.

Source : https://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667 (21) 00064-5/fulltext

On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1) On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
   On note I l'évènement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
   Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?
2) On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.
   On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
   a) Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   b) Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
   c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?
      On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   d) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ?
      On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
   e) Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leqslant n) > 0,9$.
      Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B :

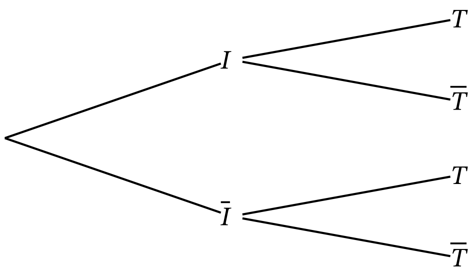
Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.
Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.
Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.
La **sensibilité** d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (II s'agit donc d'un vrai positif).
La **spécificité** d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (II s'agit donc d'un vrai négatif).

Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

- Sa sensibilité est de 0,8.
- Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note T l'évènement « le test réalisé est positif ».

1) Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2) Montrer que $p(T) = 0,05503$.
3) Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif?
   On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C :

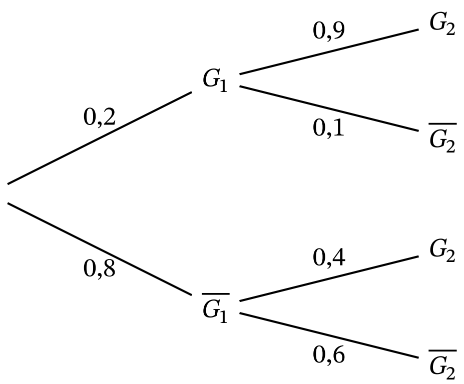
On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité $0,8$ et de spécificité $0,99$.
Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de $29,44\,\%$.
On choisit au hasard un individu de ce groupe ; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?

(Correction)

Corrigé de l'exercice 2

Partie A

1.



2. On a :

$$p(G1 \cap G2) = p(G1) \times p_{G1}(G2) = 0{,}2 \times 0{,}9 = 0{,}18.$$

3. On a de même :

$$p(\overline{G1} \cap G2) = p(\overline{G1}) \times p_{\overline{G1}}(G2) = 0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}32.$$

Donc d'après la loi des probabilités totales :

$$p(G2) = p(G1 \cap G2) + p(\overline{G1} \cap G2) = 0{,}18 + 0{,}32 = 0{,}5.$$

Partie B

1.

Valeurs de X	-2	0,5	3	Total
Probabilité	0,48	0,34	0,18	1

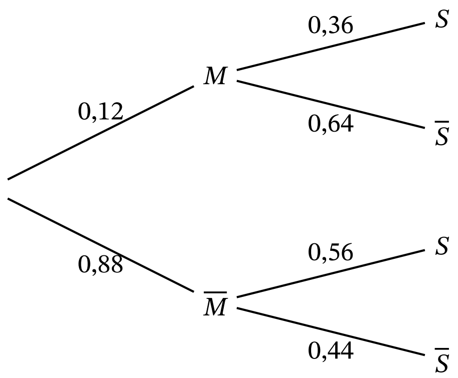
2. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est égale à :

$$E(X) = -2\times0{,}48+0{,}5\times0{,}34+3\times0{,}18 = -0{,}96+0{,}17+0{,}54 = -0{,}25.$$

Ceci signifie que sur un grand nombre de parties, un joueur perdra en moyenne 25 centimes par partie. Le jeu n'est donc pas équitable.

Corrigé de l'exercice 3

1.



2.

a. On calcule :

$$\begin{aligned} p(M \cap S) &= p(M) \times p_M(S) \\ &= 0{,}12 \times 0{,}36 \\ &= 0{,}0432. \end{aligned}$$

b. On a de même :

$$\begin{aligned} p(\overline{M} \cap S) &= p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(S) \\ &= 0{,}88 \times 0{,}56 \\ &= 0{,}4928. \end{aligned}$$

D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(M \cap S) + p(\overline{M} \cap S) \\ &= 0{,}0432 + 0{,}4928 \\ &= 0{,}536 \neq 0{,}5184. \end{aligned}$$

3.

Il faut calculer :

$$\begin{aligned} p_{\overline{S}}(M) &= \frac{p(\overline{S} \cap M)}{p(\overline{S})} \\ &= \frac{p(M \cap \overline{S})}{p(\overline{S})} \\ &= \frac{0{,}12 \times 0{,}64}{1 - 0{,}536} \\ &= \frac{0{,}0768}{0{,}464} \approx 0{,}166. \end{aligned}$$

4.

D'après la question précédente : la probabilité d'être malade sachant que l'on a une activité sportive est égale à :

$$\begin{aligned} p_S(M) &= \frac{p(S\cap M)}{p(S)} \\ &= \frac{p(M\cap S)}{p(S)} \\ &= \frac{0{,}0432}{0{,}536} \approx 0{,}081. \end{aligned}$$

$$0{,}081 \approx \frac{0{,}166}{2},$$

cette probabilité est environs la moitié de la précédente : la conclusion du journaliste est pertinente.

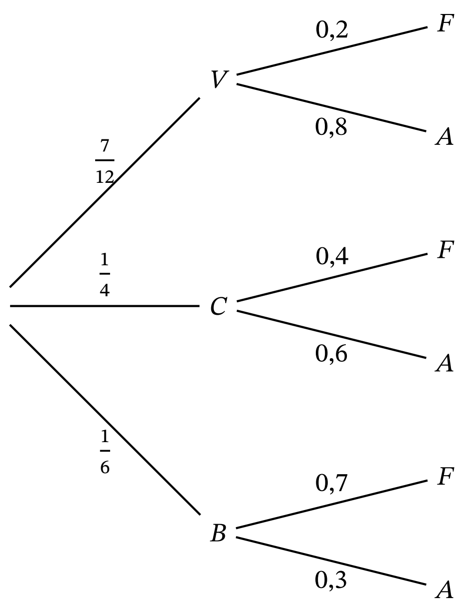
Corrigé de l'exercice 4

1.

Le lait de brebis est représenté par un secteur de 60° : sa proportion est donc de $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$;
Le lait de chèvre est représenté par un secteur de 90° : sa proportion est donc de $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$;
Le lait de vache est représenté par un secteur de $360 - (60 + 90) = 360 - 150 = 210°$: sa proportion est donc de $\frac{210}{360} = \frac{7}{12}$.
On a $P_C(A) = 0{,}6$ et $P(B) = \frac{1}{6}$.

2.

On peut dresser un arbre pondéré de probabilités :



Calculons les probabilités :

$$P(V\cap A) = P(V)\times P_V(A) = \frac{7}{12}\times 0{,}8 = \frac{5{,}6}{12} = \frac{1{,}4}{3} = \frac{7}{15},$$

$$P(C\cap A) = P(C)\times P_C(A) = \frac{1}{4}\times 0{,}6 = \frac{0{,}6}{4} = 0{,}15,$$

$$P(B\cap A) = P(B)\times P_B(A) = \frac{1}{6}\times 0{,}3 = \frac{0{,}3}{6} = 0{,}05.$$

D'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(V\cap A) + P(C\cap A) + P(B\cap A) \\ &= \frac{7}{15} + 0{,}15 + 0{,}05 \\ &= \frac{7}{15} + 0{,}20 \\ &= \frac{7}{15} + \frac{3}{15} \\ &= \frac{10}{15} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

3.

On a :

$$P_A(V) = \frac{P(V\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{7\times 3}{15\times 2} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10},$$

soit 0,7 à 10^{-3} près.

Corrigé de l'exercice 5

1. M peut être égal à 1 avec une probabilité $\frac{11}{100} = 0,11$ ou à 0 avec une probabilité 0, 89 donc M suit une loi de Bernoulli et son paramètre est $p = 0,11$.

2 On applique la formule du cours. $E(M) = p = 0,11$.

Corrigé de l'exercice 6

1. On considère une succession de 3 expériences de Bernoulli en considérant qu'un succès est : «Obtenir PILE » par exemple, identiques et indépendantes avec la probabilité d'un succès qui est 0,75 donc cette succession d'épreuves est bien un schéma de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0,75$.
2. Arbre pondéré correspondant à la situation : (pas fait, dsl !! !!)
3. La probabilité d'obtenir exactement une fois PILE est $3\times 0,75\times 0,25^2 = 0,14062514^e, 6^e$ et 7^e chemins en partant du haut).

Corrigé de l'exercice 7

1. On doit supposer que toutes les parties sont indépendantes.
2. Si on fait un arbre, il y a un seul chemin correspondant à 3 parties perdues et toutes les pondérations inscrites dessus sont 0,9 donc cette probabilité est $0,9^3 = 0,729$.

Corrigé de l'exercice 8

1. T donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 15$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès correspond à : «Obtenir un trèfle ») de paramètre $p = 0,25$ donc T suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,25$.

2.

$$p(T=5) = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} \times 0,25^5 \times 0,75^{15-5}$$
$$= \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} \times 0,25^5 \times 0,75^{10} \approx 0,17$$

Corrigé de l'exercice 9

1) Cela revient à répéter 5 fois de façon identique et indépendante l'épreuve de Bernoulli « face » ($p = 0,5$); « pile » ($1 - p = 0,5$) . Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,5$.

2) $p(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0,5^3 \times 0,5^2 = 0,3125$

3) $p(X = 0) = (0,5)^5 = 0,03125$

4) $1 - p(X = 0) = 1 - 0,03125 = 0,96875$

Corrigé de l'exercice 10

a) Environ 0,197.
b) Environ 0,366.
c) Environ 0,861.
d) Environ 0,66.

Corrigé de l'exercice 11

1) Si on note X le nombre d'objets sans défaut, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,92$.
Probabilité que les dix objets soient sans défaut $= p(X = 10) = 0,92^{10} \approx 0,4344$.

2) Probabilité qu'au moins 8 objets soient sans défaut $= p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) = \binom{10}{8} \times 0,92^8 \times 0,08^2 + \binom{10}{9} \times 0,92^9 \times 0,08^1 + 0,92^{10} \approx 0,9599$

Corrigé de l'exercice 12

1) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{15}$.
$p(X = k) = \binom{10}{k} \times \left(\dfrac{1}{15}\right)^k \times \left(\dfrac{14}{15}\right)^{10-k}$.

2) $E(X) = n \times p = 10 \times \dfrac{1}{15} \approx 0,667$.

3) Gain moyen $\approx 100 \times 0,667 \approx 66,7$

Corrigé de l'exercice 13

Notons X le nombre de parties que l'on gagne.

- Premier cas : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,5$.
  Probabilité de « gagner deux parties sur quatre » $= p(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,5^2 \times 0,5^2 = 0,375$
- Second cas : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,5$.
  Probabilité de« gagner quatre parties sur huit » $= p(X = 4) = \binom{8}{4} \times 0,5^4 \times 0,5^4 \approx 0,273$

Le premier cas est le plus probable.

Corrigé de l'exercice 14

1. T donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 15$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès correspond à : «Obtenir un trèfle ») de paramètre $p = 0,25$ donc T suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,25$.

2.

$$p(T=5) = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} \times 0,25^5 \times 0,75^{15-5}$$
$$= \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} \times 0,25^5 \times 0,75^{10} \approx 0,17$$

Corrigé de l'exercice 15

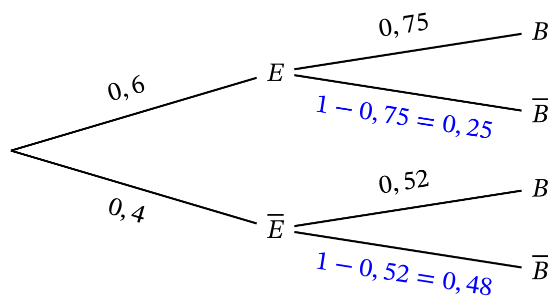
Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.
On choisit un acheteur au hasard et on considère les évènements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

On crée un arbre pondéré résumant la situation.



1) La probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile est :
$P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$.

2) D'après la formule des probabilités totales :
$P(B) = P(E \cap B) + P\left(\overline{E} \cap B\right) = 0,45 + 0,4 \times 0,52 = 0,658$.

3) Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.
La probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique est :
$P_B(E) = \dfrac{P(E \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,45}{0,658} \approx 0,684$.

4) On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.

a) On est dans le cas d'une répétition avec remise d'une expérience n'ayant que 2 issues : la possibilité d'installer une borne de recharge, avec la probabilité $p = 0,658$, ou non. Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,658$.

b) $P(X = 8) = \binom{20}{8} \times 0,658^8 \times (1 - 0,658)^{20-8} \approx 0,011$

c) La probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge est : $P(X \geqslant 10) = 1 - P(X \leqslant 9) \approx 1 - 0,0452 \approx 0,955$

d) L'espérance de X est : $E(X) = 20 \times 0,658 = 13,16$.

e) La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1200 €.

L'espérance de X représente le nombre moyen de clients pouvant installer une borne de recharge à leur domicile. L'installation d'une borne coûte 1200 €.

Il faut donc prévoir : $13,16 \times 1200$ soit 15792 €.

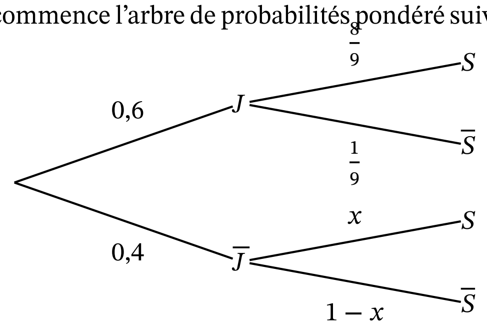
Corrigé de l'exercice 16

1) D'après l'énoncé $P(J) = 0,6$ et $P_J(S) = \dfrac{8}{9}$.

On a donc $P(J \cap S) = P(J) \times P_J(S) = 0,6 \times \dfrac{8}{9} = \dfrac{4,8}{9} = \dfrac{3 \times 1,6}{3 \times 3} = \dfrac{1,6}{3} = \dfrac{5 \times 1,6}{5 \times 3} = \dfrac{8}{15}$.

2) a) On sait que $P(S) = \dfrac{2}{3}$.

On commence l'arbre de probabilités pondéré suivant :



D'après la loi des probabilités totales :

$P(S) = P(J \cap S) + P\left(\overline{J} \cap S\right)$, soit $\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{15} + P\left(\overline{J} \cap S\right) \iff P\left(\overline{J} \cap S\right) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{10}{15} - \dfrac{8}{15} = \dfrac{2}{15}$.

La probabilité que la personne choisie n'a pas l'intention de regarder les JO à la télévision et a une activité sportive régulière est égale à $\dfrac{2}{15}$;

b) On a $P_{\overline{J}}(S) = \dfrac{P\left(\overline{J} \cap S\right)}{P\left(\overline{J}\right)} = \dfrac{\frac{2}{15}}{0,4} = \dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{2}{15} \times \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{3} = x$.

3) a) Les personnes sont choisies au hasard et chacune d'elles a une pratique sportive régulière avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

b) On a $P(X = 16) = \dbinom{30}{16}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16} \times \left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^{30-16} = \dbinom{30}{16}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{16} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{14} \approx 0,0462$ soit 0,046 au millième près à la calculatrice.

c) On a $\dfrac{10000}{380} \approx 26,3$: on peut donc offrir 26 entrées gratuites au maximum.

La calculatrice donne $P(X \leqslant 26) \approx 0,9967$ soit environ 0,997. La probabilité que le budget soit insuffisant est donc égale à environ $1 - 0,997$ soit environ 0,003 ou trois millièmes.

Corrigé de l'exercice 17