Cours & méthodes

# Les Matrices

3

ALGEBRE

## Plan de Travail

Activité A p 176 ☐

# 1 Généralités sur les matrices

## 1.1 Vocabulaire et notations :

**Définition 1 : Matrice**

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls.
Une **matrice** $A$ de dimension (ou de taille) $n \times p$ est un tableau de nombres à $n$ lignes et à $p$ colonnes. Ces nombres sont appelés les **coefficients** de la matrice $A$.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, le coefficient de la matrice $A$ situé à l'intersection de la $i$-ème ligne et de la $j$-ème colonne est noté $a_{ij}$ et appelé coefficient d'indice $(i\,;j)$.

**Exemple**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $2 \times 3$.
$a_{23}$ est le coefficient de la matrice situé à la ligne 2 et à la colonne 3, $a_{23} = 6$.
On a alors :

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{13} = 3$$

$$a_{21} = 4, \quad a_{22} = 5, \quad a_{23} = 6$$

**Définition 2 : Vocabulaire :**

- Une matrice ayant le même nombre $n$ de lignes que de colonnes est appelée **matrice carrée d'ordre** $n$.
- Une matrice n'ayant qu'une colonne est appelée **matrice colonne**.
- Une matrice n'ayant qu'une seule ligne est appelée **matrice ligne**.
- Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement lorsque $i = j$.
- La **matrice identité** d'ordre $n$ est la matrice diagonale d'ordre $n$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. On la note $I_n$ ou seulement $I$.

**Exemple**

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont des matrices colonnes.

La matrice $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

Les matrices $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales d'ordre respectivement 3 et 2.

La matrice identité d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice identité d'ordre 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Propriété** 1 : Égalité de deux matrices

Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont la même dimension et si les coefficients qui occupent la même position sont deux à deux égaux.

**Méthode** 1 : Égalité de deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a+3 \\ 4 & b-2 \end{pmatrix}$$

Déterminer, si possible, les réels $a$ et $b$ tels que $A = B$.

Correction

## 1.2 Somme et produit par un réel

**Définition** 3

Soient $A$ et $B$ deux matrices de même dimension.

- La somme des matrices $A$ et $B$ est la matrice, notée $A + B$, obtenue en additionnant deux à deux les coefficients de $A$ et $B$ qui occupent la même position.
- Le produit de la matrice $A$ par un réel $k$ est la matrice, notée $kA$, obtenue en multipliant chaque coefficient de $A$ par $k$.

La proposition suivante découle immédiatement des propriétés de l'addition et de la multiplication par un réel dans $\mathbb{R}$ :

**Propriété** 2

Soient $A$, $B$ et $C$ trois matrices de mêmes dimensions, $k$ et $k'$ deux réels.

i) $A + B = B + A$.

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$.

iii) $(k + k')A = kA + k'A$.

iv) $k(A + B) = kA + kB$.

**Définition** 4

On appelle **opposée** de $A$, la matrice $(-1)A$, notée plus simplement $-A$. De plus, $A - B = A + (-B)$.

**Méthode** 2 : Somme et produit d'un réel sur une matrice

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Calculer les matrices $C = 3A$, $D = A + B$ et $E = 2A - 3B$.

Correction

# Plan de Travail

21 p 190 ☐

**QCM n°1**

## 1.3 Produit matriciel

**Définition** 5

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de dimension $n \times p$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de dimension $p \times q$.
Le **produit de la matrice** $A$ **par la matrice** $B$ est la matrice, notée $A \times B$, de dimensions $n \times q$ dont le coefficient $c_{ij}$ (avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant q$) est le produit de la ligne $i$ de la matrice $A$ par la colonne $j$ de la matrice $B$ :

$$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ip} \times b_{pj}$$

**Remarque** 1 : Compatibilité

e produit de deux matrices n'est pas défini s'il n'y a pas, comme on dit, *compatibilité des dimensions* :

$$\boxed{\text{Matrice de taille } n \times p \quad \times \quad \text{Matrice de taille } p \times q \quad = \quad \text{Matrice de taille } n \times q}$$

**Exemple**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Soit $A$ une matrice de dimension $3 \times 2$ et $B$ une matrice de dimension $2 \times 3$.
$A \times B$ est une matrice de dimension $3 \times 3$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 \times 5 + 1 \times 2 & 3 \times 2 + 1 \times 6 & 3 \times (-1) + 1 \times (-3) \\ 4 \times 5 + (-1) \times 2 & 4 \times 2 + (-1) \times 6 & 4 \times (-1) + (-1) \times (-3) \\ 7 \times 5 + 8 \times 2 & 7 \times 2 + 8 \times 6 & 7 \times (-1) + 8 \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 12 & -6 \\ 18 & 2 & -1 \\ 51 & 62 & -31 \end{pmatrix}$$

**Remarque** 2 : Commutativité

La multiplication de matrices **n'est pas commutative** : $A \times B \neq B \times A$.

**Exemple**

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$B$ est une matrice de dimension $2 \times 3$ et $A$ une matrice de dimension $3 \times 2$.
$A \times B$ est une matrice de dimension $3 \times 3$ ()alors que $B \times A$ est une matrice de dimension $2 \times 2$.
Ici, $A \times B$ et $B \times A$ n'ont pas les mêmes dimensions. Elles ne peuvent être égales.
On veut vérifier que

$$B \times A = \begin{pmatrix} 5 \times 3 + 2 \times 4 + (-1) \times 7 & 5 \times 1 + 2 \times (-1) + (-1) \times 8 \\ 2 \times 3 + 6 \times 4 + (-3) \times 7 & 2 \times 1 + 6 \times (-1) + (-3) \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ 9 & -28 \end{pmatrix}$$

qui est différente de $A \times B$ calculée dans l'exemple précédent.

**Méthode** 3 : Effectuer un produit matriciel

On considère les matrices :
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
$D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Peut-on effectuer les produits $A \times E$ ? $E \times A$ ? et $D \times E$ ?
b) Calculer les produits $A \times C$, $D \times B$, $B \times E$, $D \times E$, $A \times B$ et $B \times A$.

Correction

**Propriété** 3

Soient $k$ un réel, $A$, $B$ et $C$ trois matrices dont les dimensions permettent les calculs suivants :

1) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C$
2) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
3) $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
4) $(kA) \times B = k(A \times B) = kAB$
5) $A \times I_n = I_n \times A = A$

**Méthode** 4 : Utiliser les propriétés multiplicatives des matriciel

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Calculer $ABC$ de deux manières.

Correction

# Plan de Travail

22 p 190 ☐ 23 p 190 ☐ 45 p 190 ☐

**QCM n°2**

### 1.4 Puissance $n$-ème d'une matrice carrée

**Définition** 6

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre supérieur ou égal à 2 et $n$ un entier naturel non nul.
La **puissance $n$-ième** de $A$ est la matrice, notée $A^n$, définie par $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$.

**Propriété** 4

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre supérieur ou égal à 2.
Pour tout entier naturel $n$ non nul, $A^{n+1} = A^n \times A = A \times A^n$ et $A^1 = A$.

**Méthode** 5 : Calculer des puissances de matrices.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2$ et $A^3$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

Démontrer que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel $n$ non nul.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $A^2$, puis $A^3$.
Que vaut $A^n$ pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 3 ?

Correction

## Plan de Travail

24 p 190 ☐ 25 p 190 ☐ 47 p 193 ☐

**QCM n°3**

# 2 Matrice inverse et système linéaire

### 2.1 Matrice inverse d'une matrice carrée

**Propriété** 5

Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$ (avec $n$ un entier naturel non nul).

- Dire que $A$ est **inversible** signifie qu'il existe une matrice carrée $B$ d'ordre $n$ telle que $A \times B = I_n$ et $B \times A = I_n$.
- Lorsqu'elle existe, la matrice $B$ est unique, on l'appelle la **matrice inverse** de $A$ et on la note $A^{-1}$

**Méthode** 6 : Calculer des puissances de matrices.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.
Calculer $A \times B$ et $B \times A$. Que peut-on en déduire ?

Correction

**Attention** : Il existe des matrices non inversibles !

Par exemple, la matrice nulle $0_n$ d'ordre $n$ n'est pas inversible car pour toute matrice carrée $A$ d'ordre $n$, $A \times 0_n = 0_n \neq I_n$.

**Propriété** 6

Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées d'ordre $n$ (avec $n$ dans $\mathbb{N}^*$) telles que $A \times B = I_n$.
Alors $B \times A = I_n$ et les matrices $A$ et $B$ sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

**Remarque**

En principe, montrer que $A$ est inversible revient à montrer l'existence d'une matrice $B$ telle que $AB = I_n$ **et** $BA = I_n$.
La propriété 6 montre que l'une ou l'autre des assertions suffit en réalité, ce qui est bien pratique.

**Méthode** 7 : Calculer des puissances de matrices.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -3 \\ -6 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Démontrer que $A$ est inversible et que $A^{-1} = B$.

Correction

**Définition** 7 : Déterminant d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.
On appelle **déterminant** de $A$ et on note $\det(A)$, le nombre $\det(A) = ad - bc$.

**Propriété** 7 : Formule d'inversion d'une matrice $2 \times 2$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2, non nulle.

- $A$ est inversible si, et seulement si, son **déterminant** est non nul.
- Dans ce cas, la matrice inverse de $A$ est $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

**Remarque**

Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice d'ordre 2 soit inversible, et donne en plus une formule donnant l'inverse.

**Méthode** 8 : Calculer des puissances de matrices.

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible puis donner $A^{-1}$

Correction

## Plan de Travail

26 p 190 ☐ 27 p 190 ☐ 46 p 192 ☐ 48 p 193 ☐

**QCM n°4**

### 2.2 Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires

**Définition** 8

Soient $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ et $f$ six nombres réels.

Le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ d'inconnues réelles $x$ et $y$ est équivalent à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

ou encore à $A \times X = B$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

$A$ est appelée la **matrice du système linéaire** et l'écriture $AX = B$ est appelée **écriture matricielle du système**.

**Exemple**

Le système $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

**Propriété** 8

On considère un système linéaire de $n$ équations à $n$ inconnues d'écriture matricielle $AX = B$, où $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$ et $B$ une matrice colonne à $n$ lignes.

Si $A$ est **inversible** alors ce système admet une **unique solution** : $X = A^{-1}B$.

**Méthode** 9 : Calculer des puissances de matrices.

On considère le système $(S)$ : $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$ .

a) Donner l'écriture matricielle de ce système.

b) Vérifier que $A$ a pour inverse $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

c) En déduire les solutions du système $(S)$.

Correction

## Plan de Travail

28 p 190 ☐ 29 p 190 ☐ 49 p 193 ☐ 50 p 193 ☐

**Synthèse :** 43 p 192 ☐ 44 p 192 ☐ 52 p 193 ☐

**QCM n°5**