Introduction aux Matrices

Maths Expert - Novembre 2024

Introduction

Quelles méthodes pour résoudre un tel système ?

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases}$$

1. Méthode graphique

Une méthode graphique, appuyée par un logiciel ou une calculatrice est efficace.

1. Méthode graphique

On reconnaît des équations cartésiennes de droites :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 2y - 12 = 0 \\ 4x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$$

Résoudre le système, c'est déterminer les coordonnées de l'éventuel point d'intersection.

1. Méthode graphique

Deux droites du plan peuvent être au choix :

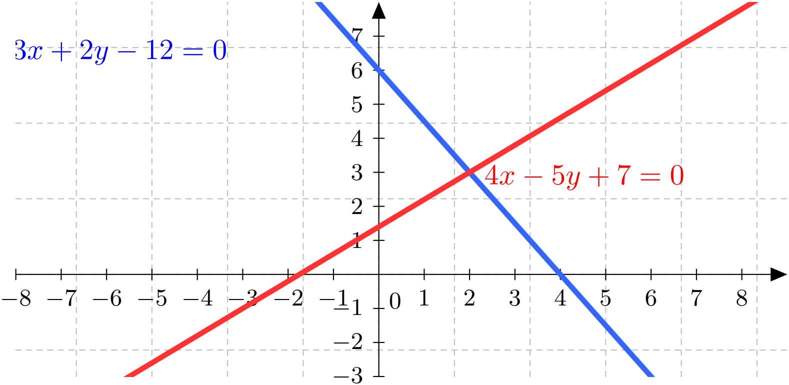
- parallèles,
- sécantes,
- confondues.

Il y a donc 3 types de solutions possibles :

- Aucune solution
- Une unique solution
- Une infinité de solution

1. Méthode graphique

Dans notre situation :



On obtient facilement

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases} \qquad S = \{(2;3)\}$$

1. Méthode graphique

Pratique, visuelle et efficace, cette méthode n'est pas rigoureuse.
On poursuit l'étude des méthodes.

2. Résolution par substitution

On isole une des deux variables pour l'exprimer en fonction de l'autre, dans une des deux équations :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \quad (L_1) \\ 4x - 5y = -7 \quad (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 2y = 12 \quad (L_1) \\ x = \dfrac{-7 + 5y}{4} \quad (L_2) \end{cases}$$

2. Résolution par substitution

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 & (L_1) \\ x = \dfrac{-7+5y}{4} & (L_2) \end{cases}$$

On remplace dans L_1 l'expression de x
par celle obtenue dans L_2.

$$\iff \begin{cases} 3 \times \left(\dfrac{-7+5y}{4}\right) + 2y = 12 & (L_1) \\ x = \dfrac{-7+5y}{4} & (L_2) \end{cases}$$

(L_1) est une équation à une inconnue du premier degré en y,
on va trouver la solution.

**La méthode par substitution est fondamentale à maîtriser, elle est très efficace et souvent utilisée.
Cependant, elle n'est pas idéale quand il y a des fractions comme ici.
On cherche mieux.**

3. Résolution par combinaison linéaire

On cherche à égaliser les coefficients d'une inconnue dans les deux équations :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 & (L_1) \\ 4x - 5y = -7 & (L_2) \end{cases}$$

Par exemple ceux de y :

$$\begin{cases} 3x \color{red}{+ 2y} = 12 & (L_1) \\ 4x \color{red}{- 5y} = -7 & (L_2) \end{cases}$$

3. Résolution par combinaison linéaire

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \quad (L_1) \\ 4x - 5y = -7 \quad (L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -15x - 10y = -60 \quad (-5 \times L_1) \\ 8x - 10y = -14 \quad (2 \times L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -15x - 10y = -60 \quad (L_1) \\ -23x = -46 \quad (L_1 - L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -15x - 10y = -60 \quad (L_1) \\ x = 2 \quad (L_2) \end{cases}$$

3. Résolution par combinaison linéaire

En remplaçant x par 2 dans une équation du système de départ, on obtiendrait facilement y et on obtient

$$S = \{(2;3)\}$$

Cette méthode est très efficace, très algorithmique.
L'idée vient alors de la systématiser
pour obtenir directement le résultat.

4. Généralisation de la méthode de résolution par combinaison linéaire

On voudrait passer directement de :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \quad (L_1) \\ x = \dfrac{-7 + 5y}{4} \quad (L_2) \end{cases}$$

à $\quad S = \left\{(2;3)\right\}$

4. Généralisation de la méthode de résolution par combinaison linéaire

Soient a, b, c, d, p, q des réels, non-tous-nuls.

$$\begin{cases} ax + by = p & \quad (L_1) \\ cx + dy = q & \quad (L_2) \end{cases}$$

Pour égaliser les termes en y,
multiplions la première équation par d et la seconde par b :

$$\begin{cases} adx + bdy = dp & \quad (L_1 \times d) \\ bcx + bdy = bq & \quad (L_2 \times b) \end{cases}$$

4. Généralisation de la méthode de résolution par combinaison linéaire

$$\begin{cases} adx + bdy = dp \quad (L_1) \\ bcx + bdy = bq \quad (L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} adx + bdy = dp \quad (L_1) \\ adx - bcx = dp - bq \quad (L_1 - L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} adx + bdy = dp \quad (L_1) \\ x(ad - bc) = dp - bq \quad (L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} adx + bdy = dp \quad (L_1) \\ x = \dfrac{dp - bq}{ad - bc} \quad (L_2) \end{cases}$$

4. Généralisation de la méthode de résolution par combinaison linéaire

En procédant de la même manière pour y, on obtient au final :

$$\begin{cases} y = \dfrac{aq - cp}{ad - bc} \\ \\ x = \dfrac{dp - bq}{ad - bc} \end{cases}$$

Une remarque ?? Un souci de rigueur ?

5. Analyse de la situation

Pour que le système existe,:

$$\begin{cases} y = \dfrac{aq - cp}{ad - bc} \\ \\ x = \dfrac{dp - bq}{ad - bc} \end{cases}$$

Il faut absolument vérifier :

$$ad - bc \neq 0$$

5. Analyse de la situation

D'où sort ce nombre $ad - bc$?

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Cela ne vous rappelle rien ??

Rappel de seconde !! :

On appelle **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre $xy' - x'y$.
On le note :

$$Det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

5. Analyse de la situation

Si on revient à notre système :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

Il admet des solutions si $ad - bc \neq 0$

$$\iff Det\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

5. Analyse de la situation

$$Det\,(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

On ne travaille pas avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Calculer leur déterminant parait un peu hors-sujet...

Pour simplifier les écritures, il convient d'utiliser de nouveaux objets :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ qu'on appelle une **matrice**

$$Det\,(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

qu'on appelle **déterminant** de la matrice A, c'est un réel.

6. Des matrices pour modéliser

Si on revient au système de départ :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

On retrouve les coefficients de notre matrice A :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a aussi :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Avec les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ ; \ P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On transforme le système de départ en une égalité entre matrices :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

L'équation à résoudre est donc $AX = P$

6. Des matrices pour modéliser

Problème, on ne sait pas (encore !!) opérer avec les matrices...

$$\text{dans } \mathbb{R} : ax = b \iff x = \frac{b}{a} \quad \text{si} \quad a \neq 0$$

$$AX = P \iff X = \frac{P}{A} = A^{-1}P \quad \text{(Résultat à conserver)}$$

7. Produit matriciel

On a cette équivalence :

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

On déduit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

7. Produit matriciel

Comment opérer les deux matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

pour obtenir

$$\begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}?$$

7. Produit matriciel

$$\begin{pmatrix}\boxed{\mathbf{a}} & \boxed{\mathbf{b}}\\ \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{\mathbf{x}}\\ \boxed{\mathbf{y}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\\ \boxed{\mathbf{c}} & \boxed{\mathbf{d}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{\mathbf{x}}\\ \boxed{\mathbf{y}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}$$

7. Produit matriciel

Appliquons cette règle de calcul à notre exemple de départ :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases}$$

on obtient donc :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x - 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$$

8. Des matrices pour résoudre

Revenons à la résolution de notre système :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$AX = P$$

Ce système admet des solutions si $ad - bc \neq 0$.
Il est donc **déterminant** de vérifier que

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

8. Des matrices pour résoudre

Supposons $Det(A) \neq 0$,
reprenons les solutions que nous avions trouvées :

$$\begin{cases} x = \dfrac{dp - bq}{ad - bc} \\[2em] y = \dfrac{-cp + aq}{ad - bc} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{dp - bq}{Det(A)} \\[2em] y = \dfrac{-cp + aq}{Det(A)} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Det(A)x = dp - bq \\[2em] Det(A)y = -cp + aq \end{cases}$$

8. Des matrices pour résoudre

En revenant aux notations matricielles, on peut dire que

$$\begin{cases} Det(A)x = dp - bq \\ \\ Det(A)y = -cp + aq \end{cases}$$

équivaut à

$$\begin{pmatrix} Det(A)x \\ Det(A)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Petit parallèle avec les vecteurs :

On note les coordonnées d'un vecteur comme une matrice 2x1 :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad \text{équivaut à} \quad U=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Si $k \in \mathbb{R}^*$,

$$k\vec{u}\begin{pmatrix}2k\\3k\end{pmatrix} \quad \text{équivaut à} \quad kU=\begin{pmatrix}2k\\3k\end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\begin{pmatrix}Det(A)x\\Det(A)y\end{pmatrix}=Det(A)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

On peut donc dire que :

$$\begin{pmatrix} Det(A)x \\ Det(A)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\iff Det(A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{Det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\iff X = \frac{1}{Det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} P$$

On a gagné !

On a trouvé la solution du système avec des matrices :

$$X = \frac{1}{Det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} P$$

On peut comparer cela

$$X = \frac{1}{Det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} P$$

au résultat obtenu plus haut :

$$X = A^{-1}P$$

Il vient que

$$A^{-1} = \frac{1}{Det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{Matrice inverse de} A$$

8. Des matrices pour résoudre

On vient donc de définir une méthode matricielle pour résoudre les systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.
Revenons au problème initial pour le résoudre :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x - 5y = -7 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

donc

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 3 \times (-5) - 2 \times 4 = -23 \neq 0$$

Le système admet donc une solution.

8. Des matrices pour résoudre

On sait que :

$$X = \frac{1}{Det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} P$$

$$X = \frac{1}{-23} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-23} \begin{pmatrix} -5 \times 12 - 2 \times (-7) \\ -4 \times 12 + 3 \times (-7) \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-23} \begin{pmatrix} -46 \\ -69 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

Les Matrices sont un puissant outil calculatoire très utilisé en physique.
Il nous revient d'en poser les bases calculatoires, les propriétés pour pouvoir les utiliser.

Complément

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×2

avec 2 lignes et 2 colonnes.

$$P = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×1

avec 2 lignes et 1 colonne.

On donne toujours le nombre de lignes en premier dans les dimensions.

Complément

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

est une matrice **carré** d'ordre 2,
elle a autant de lignes que de colonnes.

$$P = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$$

est une matrice **colonne**.

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$$

est une matrice **ligne**.

Complément

On observe qu'un produit matriciel existe, si le nombre de colonnes de la première matrices est égal au nombre de lignes de la deuxième.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 4x - 5y \\ 2x + 6y \end{pmatrix}$$

Mais :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{n'est pas possible}$$

On nomme les coefficients :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 5 \quad ; \quad a_{12} = 3 \quad ; \quad a_{13} = -2$$

$$a_{21} = 7 \quad ; \quad a_{22} = 0 \quad ; \quad a_{23} = -1$$