Cours & méthodes

Loi binomiale

6

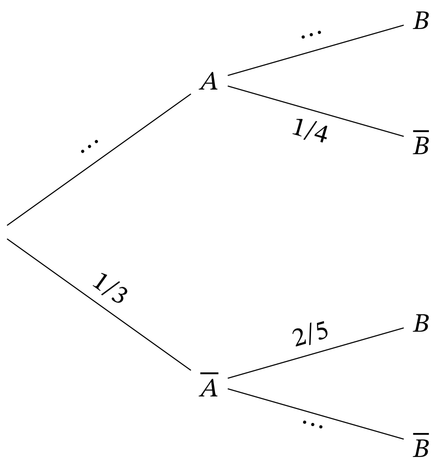
ANALYSE

1 Probabilité conditionnelle de B sachant A

Méthode 1 : Exemple à partir d'un arbre pondéré

On considère une expérience aléatoire modélisée par l'arbre pondéré ci-contre.

1) Compléter les pondérations manquantes de l'arbre.
2) Donner les valeurs de $p_A(B)$ et $p_{\overline{A}}(\overline{B})$
3) Calculer $p(A \cap B)$



Correction

Propriété 1

- Sur les branches du premier niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants.
- Sur les branches du deuxième niveau, on inscrit les probabilités conditionnelles.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- Le produit des probabilités des événements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

On considère Ω l'univers d'une expérience aléatoire et P une loi de probabilité définie sur Ω.

Définition 1

Soit A et B deux événements d'un univers Ω tels que $P(A) \neq 0$.

La **probabilité conditionnelle de** B **sachant** A est le nombre noté $P_A(B)$ et défini par $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Méthode 2 : Calcul d'une probabilité conditionnelle

On lance un dé bien équilibré à six faces. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair sachant qu'on a obtenu un nombre supérieur ou égal à 3 ?

Correction

Propriété 2

Soient A un événement de probabilité non nulle et B un événement quelconque dans l'univers Ω.

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$

Méthode 3 : Exercice classique de première spé

80% d'une population est vaccinée contre une maladie. On constate que 2% des personnes vaccinées sont atteintes par la maladie. On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir une personne vaccinée et malade ?

Correction

Méthode 4 : Exercice classique de première spé

Tous les élèves de terminale d'un lycée ont passé une test de certification en anglais.

- 80 % ont réussi le test ;
- Parmi ceux qui ont réussi le test, 95% n'ont jamais redoublé ;
- Parmi ceux qui ont échoué au test, 2% n'ont jamais redoublé

On choisit un élève de terminale au hasard et on considère les événements T : « l'élève a réussi le test » et R : « l'élève a déjà redoublé »

a) Interpréter à l'aide des événements T et R les données de l'énoncé.

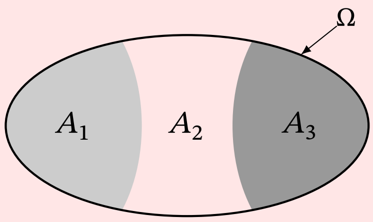
b) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré en utilisant les règles rappelées dans la proposition ci-dessus.

c) Calculer la probabilité que l'élève ait réussi le test et qu'il n'ait jamais redoublé.

Correction

Définition 2 : Partition de l'univers

Soit n un entier naturel non nul. On dit que les événements A_1, A_2, ..., A_n forment une **partition** de l'univers Ω ou un **système complet d'événements**, s'ils sont deux à deux disjoints et si leur réunion est l'univers Ω.



Exemple 1

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à six faces. L'univers est l'ensemble $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. Les événements $A_1 = \{1;4\}$, $A_2 = \{3\}$ et $A_3 = \{2;5;6\}$ forment une partition de l'univers.

Propriété 3 : Formule des probabilités totales

Soit n un entier naturel non nul et soit A_1, A_2, ..., A_n une partition de l'univers Ω d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B de Ω, on a :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Méthode 5 : Exercice classique de première spé

On reprend l'exemple des élèves de terminale et du test de certification en anglais. Calculer :

a) la probabilité qu'un élève choisi au hasard n'ait pas redoublé ;

b) la probabilité qu'un élève ayant redoublé réussisse son test ;

c) la probabilité qu'un élève qui n'a jamais redoublé réussisse son test.

Correction

2 Succession d'épreuves indépendantes

Définition 3 : Succession d'épreuves

Soit n un entier naturel.
On considère n épreuves aléatoires dont les univers sont respectivement Ω_1, Ω_2, ... , Ω_n.
L'univers Ω de la succession de ces n épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.
Les issues de cette succession d'expériences sont les n-uplets $(i_1 ; i_2 ; \ldots ; i_n)$ de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$.

Exemple 2

On lance 2 fois un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6 et on regarde le numéro obtenu.
L'univers de chaque lancer est $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
L'univers de cette expérience est le produit cartésien des deux univers identiques : $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \times \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ que l'on écrit : $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}^2$.
L'issue $(1 ; 3)$ signifie que l'on a obtenu 1 au premier lancer et 3 au deuxième.

Méthode 6 : Univers d'une succession d'épreuves

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce de monnaie équilibrée et à noter sa face puis à choisir un jeton dans une urne contenant six jetons indiscernables au toucher : 3 jetons bleus, 2 jetons rouge et un jeton jaune.

a) Déterminer l'univers de chaque épreuve puis l'univers de l'expérience aléatoire.

b) Représenter l'expérience aléatoire à l'aide d'un arbre et donner toutes les issues de l'expérience aléatoire.

Correction

Définition 4 : Épreuve indépendante - Rappels 1ère

Dans une succession d'épreuves, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont **indépendantes**.

Propriété 4 : Épreuve indépendante - Rappels 1ère

Dire que deux évènements évènements A et B sont indépendants signifie que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Définition 5 : Indépendance mutuelle

Soit n un entier naturel. On considère n épreuves aléatoires dont les univers sont respectivement Ω_1, Ω_2, … , Ω_n, de lois respectives P_1, P_2, … , P_n.
Les épreuves sont dites mutuellement indépendantes (ou tout simplement indépendantes) si, pour toute issue $(i_1, i_2, ..., i_n)$ de $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n$,

$$P((i_1, i_2, ..., i_n)) = P_1(i_1) \times P_2(i_2) \times \cdots \times P_n(i_n)$$

La probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités.

Méthode 7 : Épreuves indépendantes

On considère trois urnes : la première contient 12 boules blanches et 18 noires, la deuxième 8 blanches et 12 noires, et la troisième 1 blanche et 5 noires.
On tire au hasard successivement une boule de chaque urne et on note sa couleur.

a) Peut-on modéliser cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes ? Justifier.

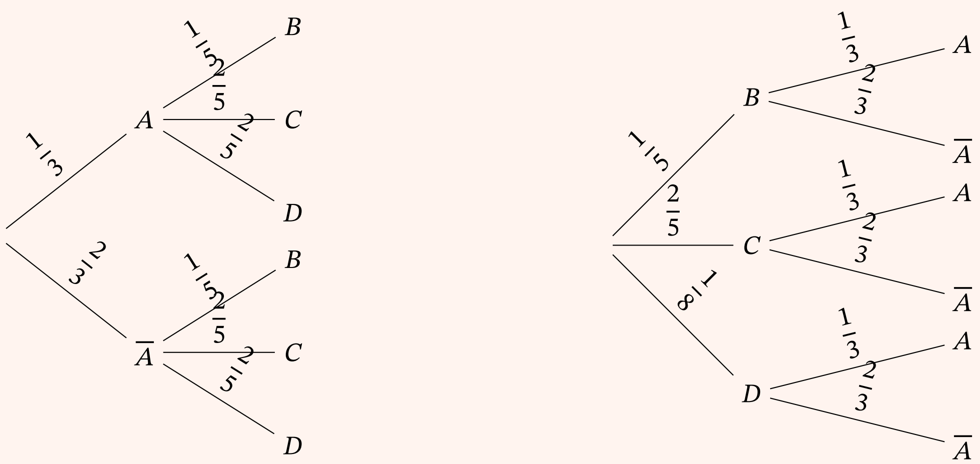
b) Réaliser un arbre pondéré représentant la situation.

c) Déterminer la probabilité de l'événement E : « obtenir une seule boule blanche » puis la probabilité de l'événement F ; « Obtenir au moins une boule blanche ».

Correction

Remarque 1 : Inversion des arbres avec des évènements indépendants

Les arbres suivants traduisent la succession de deux épreuves indépendantes.



3 Épreuve de Bernoulli

Définition 6 : Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont l'univers ne comporte que deux issues : le succès S et l'échec $\overline{S}$.
On note p la probabilité de succès, aussi appelé paramètre de l'épreuve de Bernoulli. La probabilité d'échec vaut donc $1 - p$.
Une variable aléatoire X sur cet univers suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $p(X = 1) = p$ et $p(X = 0) = 1 - p$.
On écrit $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Epreuve de Bernoulli

Évènement	S	$\overline{S}$
Probabilité	p	$1-p$

Variable de Bernoulli

k	1	0
$p(X=k)$	p	$1-p$

Cours en vidéo

Méthode 8 : Épreuves de Bernoulli

On lance un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.
On considère le succès "Obtenir le nombre 6" et on note X la variable aléatoire associée qui prend la valeur 1 en cas de succès, 0 sinon.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Correction

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement

$$E(X)=p, \quad Var(X)=p(1-p), \quad \sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$$

Démonstration 1

La variable aléatoire X prend les valeurs 0 et 1. De plus $p(X=0)=1-p$ et $p(X=1)=p$. Ainsi,

$$E(X)=0\times p(X=0)+1\times p(X=1)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

et

$$Var(X)=p(X=0)\times(0-E[X])^2+p(X=1)\times(1-E[X])^2$$

d'où

$$Var(X)=(1-p)\times(-p)^2+p\times(1-p)^2=p(1-p)(p+1-p)=p(1-p)$$

Méthode 9 : Variance et écart-type d'une épreuve de Bernoulli

Soit X un variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $0,2$.
Déterminer la variance et l'écart-type de X.

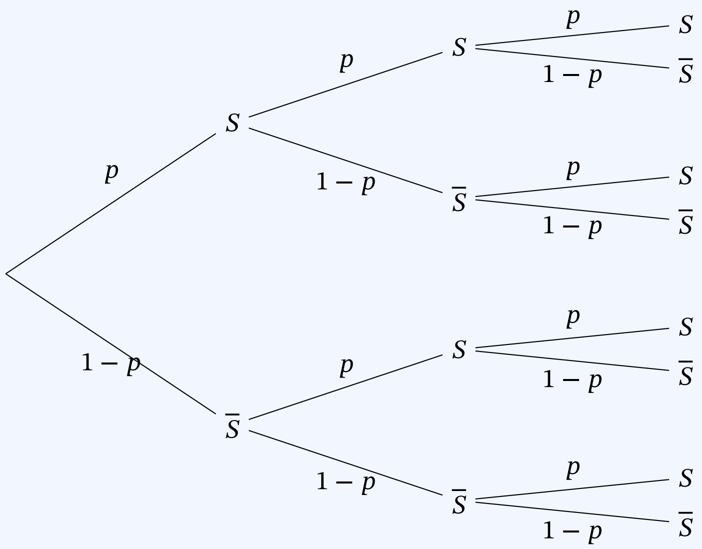
Correction

4 Schéma de Bernoulli

Définition 7 : Schéma de Bernoulli

On appelle **schéma de Bernoulli** la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**, de probabilité de succès p pour chacune d'entre elles.
Le nombre entier n et le nombre réel p sont les paramètres du schéma de Bernoulli.

Exemple 3 : Arbre pondéré d'un schéma de Bernoulli avec $n = 3$.



Les trois épreuves successives sont identiques et indépendantes.
Exemple, on lance 3 fois de suite un dé. On considère comme succès "le dé fait tombe sur 5 ou 6".
Il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$

Méthode 10 : Calculs dans un schéma de Bernoulli

On lance trois fois de suite un dé bien équilibré.
On s'intéresse au nombre de 6 obtenus lors de ces trois lancers.

a) Justifier que cette expérience peut être modélisée par un schéma de Bernoulli.

b) À l'aide d'un arbre pondéré, calculer la probabilité d'avoir un seul 6 à l'issue des trois lancers.

Correction

5 Coefficients binomiaux

Méthode 11 : Déterminer avec un arbre une loi Binomiale

Une expérience consiste à tirer au hasard 3 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans l'urne.
La probabilité d'obtenir une boule gagnante est de 0,3 à chaque tirage.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre succès.
Déterminer la loi de probabilité de x.

Correction Correction vidéo

Définition 8

On réalise une expérience suivant une loi de Bernoulli, de paramètre n et p.
Soi un entier naturel k correspondant au nombre de succès.
On appelle **coefficient binomial** le nombre de chemin conduisant à succès parmi épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.
On le note $\binom{n}{k}$ et on le lit "k parmi n".

Cours en vidéo

5.1 Calculs des coefficients binomiaux avec un arbre :

Méthode 12 : Calculer des coefficients binomiaux avec un arbre.

Calculer : $\binom{3}{0} = \cdots$; $\binom{3}{1} = \cdots$; $\binom{3}{2} = \cdots$; $\binom{3}{3} = \cdots$

Propriété 6 : Coefficients binomiaux triviaux

Pour tout entier naturel n :

- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{0} = 1$

5.2 Calculs des coefficients binomiaux par dénombrement :

Remarque 2 : Méthodes de calculs des coefficients binomiaux

On peut calculer les coefficients binomiaux par dénombrement
ou en utilisant le triangle de pascal. Voir vidéo pour comprendre.

Cours en vidéo

Méthode 13 : Calculer des coefficients binomiaux par dénombrement

Calculer $\binom{4}{1}$ et $\binom{4}{2}$

Correction

5.3 Calculs des coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal :

Méthode 14 : Calculer des coefficients binomiaux avec le triangle de Pascal :

On construit ce triangle, en partant du triangle de départ $1;1;1$ sur les 2 premières lignes.
Sur les bords, on reporte des 1.
Puis, on reporte la somme de deux nombres voisins au milieu, à l'étage inférieur.
On met ensuite n pour le numéro de lignes, et k pour le rang en colonne, en n'oubliant pas qu'on commence par 0.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0: & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1: & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2: & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3: & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4: & & 1 & & \dots & & \dots & & \dots & & 1 & \\
n=5: & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Ainsi, on lit : $\binom{4}{2} = \dots$

5.4 Calculs des coefficients binomiaux à la calculatrice :

Tutoriel Numworks

Tutoriel Casio

5.5 Calculs des coefficients binomiaux par calcul :

Définition 9 : Factorielle

Soit n un entier naturel.
On note $n!$ (factorielle de n) le produit de tous les entiers de 1 à n (et on convient que $0! = 1$).

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1$$

Méthode 15 : Calculer factorielles

Calculer $5!$ et $\frac{8!}{6!}$

Correction

Propriété 7

Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Méthode 16 : Calculer un coefficient binomial

Calculer $\binom{5}{3}$

Correction

6 Loi binomiale

Définition 10 : Loi binomiale

Soit n un entier naturel et p un réel compris entre 0 et 1.
On considère un schéma de Bernoulli à n épreuve de paramètre p.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès de ce schéma de Bernoulli.
On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
On écrit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Exemple 4

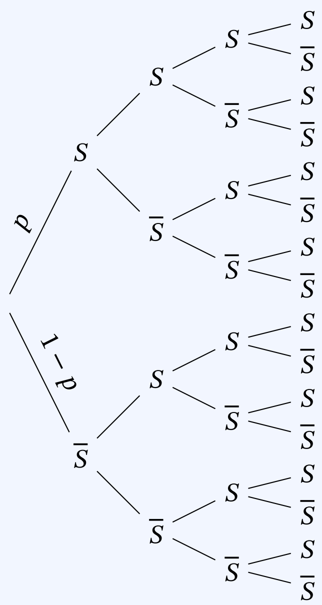
On lance une pièce équilibrée 5 fois de suite et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de FACE obtenus

- On a bien des épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques.
- Ces épreuves sont au nombre de 5.
- Pour chaque épreuve, la probabilité de succès (ici, la probabilité d'obtenir FACE) vaut $\frac{1}{2}$

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{1}{2}$.

Exemple 5

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres 4 et p. Ce schéma peut se traduire par l'arbre suivant :



Les chemins menant à deux succès sont $SS\overline{SS}$, $S\overline{S}S\overline{S}$, $S\overline{SS}S$, $\overline{SS}SS$, $\overline{S}S\overline{S}S$ et $\overline{S}SS\overline{S}$. De plus,

- $p(SS\overline{SS}) = p \times p \times (1-p) \times (1-p) = p^2(1-p)^2$
- $p(S\overline{S}S\overline{S}) = p \times (1-p) \times p \times (1-p) = p^2(1-p)^2$
- $p(S\overline{SS}S) = p \times (1-p) \times (1-p) \times p = p^2(1-p)^2$
- $p(\overline{SS}SS) = (1-p) \times (1-p) \times p \times p = p^2(1-p)^2$
- $p(\overline{S}S\overline{S}S) = (1-p) \times p \times (1-p) \times p = p^2(1-p)^2$
- $p(\overline{S}SS\overline{S}) = (1-p) \times p \times p \times (1-p) = p^2(1-p)^2$

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès à l'issue de ce schéma. On a donc $p(X=2) = 6p^2(1-p)^2$
En modifiant cette écriture, on a : $p(X=2) = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^{4-2}$

Propriété 8

Soit n un entier naturel, p un réel compris entre 0 et 1
et X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n,

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Démonstration

Méthode 17 : Appliquer la formule de probabilité de la loi binomiale

Une expérience consiste à tirer au hasard 8 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans l'urne.
La probabilité d'obtenir une boule gagnante est de 0,3 à chaque tirage.
Calculer la probabilité d'avoir 3 succès.

Correction

Méthode 18 : Déterminer une loi de probabilité avec la loi binomiale

X suit donc une loi Binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,3$.
Déterminer la loi de probabilité de X.

Tutoriel Numworks

Tutoriel Casio

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
L'espérance, la variance et l'écart-type de X valent respectivement :

$$E(X) = np, \quad Var(X) = np(1 - p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

Méthode 19 : Déterminer une loi de probabilité avec la loi binomiale

Un élève répond au hasard et de manière indépendante à un QCM de 20 questions.
Chaque question laisse le choix entre 4 propositions dont une seule est correcte.
On note X le nombre de bonnes réponses de l'élève.
Déterminer $E(X)$ et $\sigma(X)$

Correction