

Continuité et TVI

Merci à Jason Lapeyronnie et Pierre Cauchois pour les sources.

5
ANALYSE

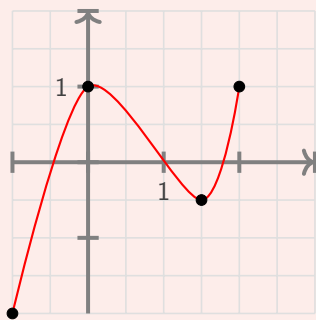
1 Continuité d'une fonction réelle

Définition 1 : Définition intuitive

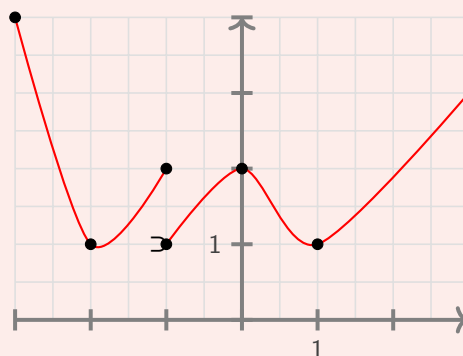
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est *continue* sur I si on peut tracer la courbe représentative de f sur I « sans lever le crayon ».

Illustration 1



La fonction représentée est continue sur $[-1; 2]$



La fonction représentée n'est pas continue sur $[-3; 3]$ mais sur $[-3; 1]$

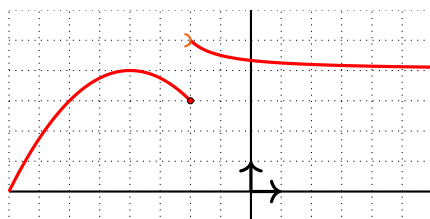
Définition 2 : Continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$.

- On dit que f est *continue* en a si f admet une limite en a , par valeurs supérieures et par valeurs inférieures, et que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$
- On dit que f est *continue* sur I si f est continue en tout réel de I .

Méthode 1 : Prouver qu'une fonction est ou non continue en une valeur.

On considère la fonction f dont la courbe représentative \mathcal{C}_f est donnée ci-dessous.



Correction

La fonction f est-elle continue en -2 ?

Méthode 2 : Fonction partie entière

Soit x un réel. La **partie entière** de x , notée $E(x)$, est le plus grand entier relatif, inférieur ou égal à x .

- Donner les parties entières des nombres suivants : $1, 2$; $1,57$; $-2, 3$; π ; 3 et -4 .
- Tracer la courbe représentative de la fonction qui à tout réel x associe sa partie entière et étudier la continuité de cette fonction sur \mathbb{R} .



Correction

Méthode 3 : Prouver qu'une fonction est ou non continue en une valeur.

On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 2x + 9 & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ 4x - 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ définie sur \mathbb{R} .

Déterminer si f est continue sur \mathbb{R} .



Correction

Propriété 1 : Pratique !

Toute fonction construite à partir des fonctions polynômes, de la fonction racine carrée, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus par addition, multiplication ou composition est continue sur tout intervalle où elle est définie.

Propriété 2 : Propriété fondamentale

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est dérivable sur I , alors f est également continue sur I .

Remarque 1 : Attention !!

La réciproque est fautive. La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R} mais n'est pas dérivable en 0.

2 Suites et fonction continue**Propriété 3** : Image d'une suite convergente

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite à valeurs dans I .

Si (u_n) converge vers un réel ℓ , alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Méthode 4

Pour tout entier naturel non nul n , on note $u_n = \sqrt{9 + \frac{1}{n}}$.
Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.



Correction

Propriété 4 : Théorème du point fixe

Soit I un intervalle, g une fonction définie et continue sur I et (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.
Si la suite (u_n) est convergente, de limite $l \in I$, alors $g(l) = l$.



Démonstration

Méthode 5 : Déterminer la valeur d'une limite d'une suite avec le théorème du point fixe

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
Montrer que, pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n \leq 4$.
En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.



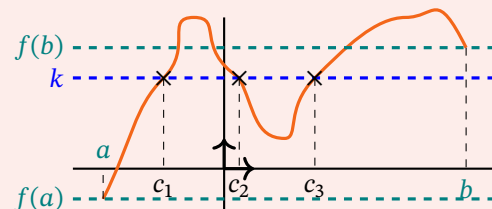
Correction

3 Théorème des valeurs intermédiaires**Propriété 5** : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a; b]$ et k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors **il existe** (au moins) un réel c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Illustration 2

On représente une fonction f ci-contre.



Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, k possède au moins un antécédent par f . Dans cet exemple, il y en a trois. Le nom de ce théorème se justifie ainsi : une fonction continue qui passe d'une valeur $f(a)$ à une valeur $f(b)$ passe forcément au moins une fois par toutes les valeurs intermédiaires.

Méthode 6 : Déterminer qu'une équation possède au moins une solution sur un intervalle.

Prouver que l'équation $x^3 - 3x - 1 = 0$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[-2; 2]$.



Correction

Remarque 2

Ce théorème ne nous donne aucune indication sur le nombre de ces solutions (en réalité, il y en a 3 sur cet intervalle).

Propriété 6 : Théorème des valeurs intermédiaires avec des limites

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $]a; b[$ telle que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ existent.

Soit k un réel strictement compris entre ces deux limites.

Alors **il existe** (au moins) un réel c dans $]a; b[$ tel que $f(c) = k$.

Méthode 7 : Déterminer qu'une équation possède au moins une solution sur \mathbb{R} .

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$, définie sur \mathbb{R} .
Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans \mathbb{R} .



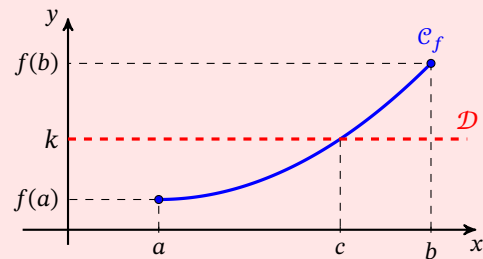
Correction

Propriété 7 : Corollaire du TVI

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a; b]$.

Soit k un réel strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou les limites en a et b de f).

Alors il existe un **unique** réel $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = k$.

**Méthode 8 : Déterminer qu'une équation possède une unique solution sur un intervalle.**

- 1) Démontrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$.
- 2) Donner un encadrement de α en procédant à la calculatrice, par « dichotomie ».



Correction

Méthode 9 : Déterminer le nombre de solutions d'une équation et leur valeur approchée respective.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{e^{x-1}}{x}$, définie sur $I =]0; +\infty[$.

Montrer que l'équation $f(x) = 2$ possède exactement deux solutions sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Donner des valeurs approchées à la calculatrice de ces solutions.



Correction