Le Cours

Équations du second degré 1

(Le second degré)

Auto-évaluation de début de chapitre :

	0	1	2	3
Développer-Réduire une expression algébrique				
Développer et factoriser avec les identités remarquables				
Factoriser une expression algébrique				
Résoudre une équation du premier degré				
Résoudre une équation produit-nul ou s'y ramenant.				

0 : Je ne sais pas faire, je ne comprends pas de quoi il s'agit.
1 : Je sais que j'ai du mal avec cette notion, je l'ai assez mal comprise ou oubliée.
2 : Je pense savoir faire.
3 : Je sais que je maîtrise cette notion.

I. Rappels :

1. Résolution d'une équation de degré 2 sous forme factorisée.

Méthode n°1 : Résoudre une équation produit-nul Niveau *

Stratégie :
On applique la propriété :
Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

Énoncé :
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(3x-2)(2-5x)=0$$

Correction :

Correction Mathalea

Remarque : **Niveau ***

Avec cette propriété des équations produit-nul,
on arrive à résoudre des équations du second degré sous forme factorisées.

Méthode n°2 : Application pour résoudre une équation du second degré : Niveau *

Stratégie :
Il suffit de développer le produit pour obtenir la forme développée et de résoudre ensuite l'équation produit nul pour trouver les solutions de l'équation initiale.

Énoncé :

1. Montrer que

$$(2x-3)(4-x) = -2x^2 + 11x - 12$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$-2x^2 + 11x - 12 = 0$$

Correction :

2. Résolution d'une équation de degré 2 sous forme non-factorisée : cas nř1

Méthode n°3 : Résoudre une équation se ramenant au produit-nul Niveau *

Stratégie :
Quand l'expression n'est pas sous forme factorisée, on ne peut évidemment pas appliquer la propriété du produit-nul !! Il faut d'abord factoriser.

Énoncé :
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(4-3x)^2 - (4-3x)(6x+7) = 0$$

Correction :

QCM n°1

note :

II. Résolution d'une équation du second degré :

1. Cas général :

Situation défavorable **Niveau ****

Ces stratégies ne nous permettent pas de résoudre l'équation

$$x^2 + 8x + 2 = 0$$

$x^2 + 8x + 2$ n'a pas de facteur commun et n'est pas une identité remarquable.
Il faut trouver une stratégie pour résoudre ce genre de situations.

2. Principe

Propriété : Méthode de résolution d'une équation de degré 2 **Niveau ***

Pour résoudre une équation de degré 2, quand on ne trouve ni facteur commun, ni identité remarquable, il faut chercher à faire apparaître le début d'une identité remarquable avec les termes en x^2 et en x.

Exemple : **Niveau ****

Résoudre $\underline{x^2 + 8x} + 2 = 0$
On reconnaît que $(x+4)^2 = \underline{x^2 + 8x} + 16$
L'astuce consiste à introduire cette identité remarquable :

$x^2 - 8x + 2 = 0$	
$x^2 - 8x + 2 + \underline{14 - 14} = 0$	On ajoute $14 - 14 = 0$, ce qui ne change rien
$x^2 - 8x + \underline{2 + 14} - 14 = 0$	On regroupe $2 + 14$ pour faire apparaître l'identité remarquable.
$\underline{x^2 - 8x + 16} - 14 = 0$	On isole l'identité remarquable sous forme développée.
$(x+4)^2 - 14 = 0$	On peut la remplacer par son expression factorisée
$(x+4)^2 - \sqrt{14}^2 = 0$	On fait apparaître $a^2 - b^2$
$(x + 4 - \sqrt{14})(x + 4 + \sqrt{14}) = 0$	Factorisation et équation produit-nul
$S = \{-4 + \sqrt{14}; -4 - \sqrt{14}\}$	

Remarque : **Niveau ***

En écrivant $x^2 + 8x + 2 = (x+4)^2 - 14$, on a transformé la forme développée du polynôme en une autre forme, que l'on appelle **forme canonique**.
Cette forme est essentielle, il faut bien la connaître. Elle est la clé de la résolution des équations du second degré.

Méthode n°4 : Résolution d'une équation du second degré avec la forme canonique :

Niveau **

Stratégie :

- Factoriser par le coefficient de x^2,
- Faire apparaître le début d'une une identité remarquable
- Écrire le polynôme de degré 2 sous forme canonique,
- Faire apparaître si possible une identité remarquable $a^2 - b^2$
- Factoriser.

Énoncé :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$-2x^2 - 4x - 3 = 0$$

Correction :

Correction Mathalea

3. Définition :

Définition : Forme canonique **Niveau ***

Soit P un polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Écrire P sous forme canonique, c'est trouver des réels α et β tels que :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Méthode n°5 : Associer une forme développée et une forme canonique — Niveau *

Stratégie :
En développant la forme canonique, on obtient la forme développée.

Énoncé :
Soit P, défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$P(x) = 3x^2 - 24x + 47$$

Montrer que la forme canonique de P est sous la forme :

$$P(x) = 3(x-4)^2 - 1$$

Correction :

QCM n°2

note :

4. Mettre un polynôme sous forme canonique :

Méthode n°6 : Déterminer algébriquement la forme canonique — Niveau : **

Stratégie :
Soit l'expression $ax^2 + bx + c$, avec a,b,c des réels, dont a est non-nul.
Pour déterminer la forme canonique de $ax^2 + bx + c$:

1. Factoriser l'expression par le coefficient a.
2. Faire apparaître le début de l'identité remarquable $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
3. Réduire les termes constants.

Énoncé :
Mettre sous forme canonique le polynôme P, qui s'écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = 3x^2 - 24x + 45$$

Correction :

Correction en vidéo

5. Propriété :

Propriété : Détermination des coefficients de la forme canonique **Niveau ***

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

$$\text{En posant : } \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

on obtient pour tout réel x, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Propriété : **Niveau ****

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Comme $a \neq 0$, pour tout réel x, $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.
Or pour tout réel x, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.
On en déduit que pour tout réel x,

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

En posant $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, on a pour tout réel x, $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Astuce !

La seule relation à connaître est $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

On trouvera toujours β en utilisant $\beta = f(\alpha)$ sans connaître la formule $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

Méthode n°7 : Déterminer avec le cours de la forme canonique : Niveau : *

Stratégie :
Pour déterminer la forme canonique de $ax^2 + bx + c$, avec a, b, c des réels, dont a est non-nul :
On calcule $\alpha = -\frac{b}{2a}$, puis $\beta = f(\alpha)$, et on obtient : $a(x - \alpha)^2 + \beta$

Énoncé :
Mettre sous forme canonique le polynôme P, qui s'écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = -3x^2 + 24x - 50$$

Correction :

Correction rédigée

QCM n°3

note :

III. Résolution des équations du second degré

Méthode n°8 : Avec la forme canonique : Niveau **

Stratégie :
On peut soit utiliser les formules de cours (niveau 1), soit refaire la démonstration algébrique (niveau 2).

Énoncé :
En utilisant la forme canonique du polynôme, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$4x^2 + 36x + 80 = 0$$

Correction :

Vidéo rédigée algébriquement.

1. Généralisation de la méthode :

Toujours pareil !!

La méthode vue précédemment est importante à maîtriser, mais elle est répétitive.
Pour gagner du temps, on va procéder à une généralisation, qui va nous donner des formules, qui permettront d'effectuer plus rapidement cette procédure, et donc de gagner du temps.
Attention, n'oubliez jamais que derrière les formules qui arrivent, se cache la méthode de résolution avec la forme canonique.

Vidéo de cours

Démonstration fondamentale : Résoudre une équation du second degré : Niveau ***

Une équation du second degré à une inconnue x,
est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$
où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.

$$\begin{aligned}
& ax^2+bx+c=0 \quad (1) \\
\iff & a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0 && \text{en utilisant la forme canonique démontrée plus haut.} \\
\iff & a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 && \text{en posant} \Delta=b^2-4ac \\
\iff & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 && \text{en divisant par } a\neq 0
\end{aligned}$$

- Si $\Delta<0$:
  alors $\dfrac{\Delta}{4a^2}<0$ et donc $-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$. Au final : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$.
  Donc l'équation du second degré n'a pas de solution.
- Si $\Delta=0$:
  alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$ équivaut à l'équation $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$.
  Donc l'équation du second degré a pour unique solution $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$:

$$\begin{aligned}
& \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \\
\iff & \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0 \\
\iff & \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0 \\
\iff & \left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0
\end{aligned}$$

  Donc l'équation du second degré a deux solutions $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

2. Propriété

Les formules de cours à connaître : Niveau *

Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$
où a, b et c sont des réels fixés avec $a\neq 0$ et $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

- Si $\Delta<0$ alors l'équation n'a pas de solution ; $S=\emptyset$.
- Si $\Delta=0$ alors l'équation a une seule solution ; $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
- Si $\Delta>0$ alors l'équation a deux solutions ; $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

QCM n°4

note :

Méthode n°9 : Résoudre une équation du second degré cas n°1 Niveau *

Stratégie :
On calcule le discriminant et selon son signe, on détermine les éventuelles solutions.

Énoncé :
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$2x^2 + 3x - 4 = 0$$

Correction :

Correction en vidéo

Méthode n°10 : Résoudre une équation du second degré cas n°1 Niveau *

Stratégie :
On calcule le discriminant et selon son signe, on détermine les éventuelles solutions.

Énoncé :
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Correction :

Correction en vidéo

Méthode n°11 : Résoudre une équation du second degré cas n°1 Niveau *

Stratégie :
On calcule se ramène à la situation de cours $ax^2 + bx + c = 0$.

Énoncé :
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$6x^2 - 3 = 7x$$

Correction :

Correction en vidéo

IV. Compléments sur la résolution des équations du second decgré :

1. Somme et produit de solutions.

Somme et Produit de solutions : Niveau *

Soit a, b et c trois réels, dont a non-nul.
Si l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions x_1 et x_2, alors $x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

Autre formulation plus pratique ! Niveau **

Si l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2, alors :

$$S = x_1 + x_2 \qquad \text{et} \qquad P = x_1 \times x_2$$

Vidéo de cours

Méthode n°12 : Utiliser somme et produit des racines. Cas simple Niveau **

Stratégie :
Quand on connaît une solution, on trouve la deuxième facilement avec les relations.

Énoncé :
L'équation $x^2 - 7x - 8 = 0$ admet comme solution évidente $x_1 = -1$.
Déterminer, sans utiliser le discriminant la valeur de x_2.

Correction :

Correction en vidéo

Démonstration fondamentale **Niveau ****

Soit S et P la somme et produit de deux réels x_1 et x_2.
On veut résumer ces informations par ce système de deux équations à deux inconnues :

$$\left\{\begin{array}{lll} S & = & x_1 + x_2 \\ P & = & x_1 \times x_2 \end{array}\right.$$

En résolvant par substitution, a un système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & S - x_2 \\ P & = & (S - x_2) \times x_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & S - x_2 \\ P & = & Sx_2 - x_2^2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & x_2 - S \\ 0 & = & Sx_2 - x_2^2 - P \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x_1 & = & x_2 - S \\ x_2^2 & - & Sx_2 + P = 0 \end{array}\right.$$

Le nombre x_2 est donc solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.
On pourrait procéder de même avec x_1 et prouver que le nombre x_1 est aussi solution de cette équation.
On a donc trouvé les solutions de l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0 \qquad S = \{x_1 ; x_2\}$$

Méthode n°13 : Utiliser somme et produit des racines

Niveau **

Stratégie :
On va appliquer la deuxième formulation pour amener à une équation du second degré.

Énoncé :
Existe-t-il deux nombres réels dont la somme vaut 4 et le produit 13 ?

Correction :

Correction en vidéo

2. Changement de variable

Méthode n°14 : Changement de variables — Niveau **

Stratégie :
Une stratégie classique en maths consiste à utiliser une variable annexe, qui simplifie l'énoncé, et permet de résoudre le problème en deux étapes.
Concrètement ici, on va poser $X = x^2$ et opérer un changement de variable, pour résoudre une équation en X.
Une fois les solutions en X trouvées, on reviendra à x pour retrouver les solutions de l'équation initiale.

Énoncé :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$-2x^4 + 9x^2 - 4 = 0$$

Correction :

Correction en vidéo

Méthode n°15 : Changement de variables — Niveau ***

Stratégie :
Il faut parfois chercher un peu pour déterminer le bon changement de variables....

Énoncé :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$-2x + 9\sqrt{x} - 4 = 0$$

Correction :

Correction en vidéo

Méthode n°16 : Changement de variables

Niveau ***

Stratégie :
Il faut parfois chercher un peu pour déterminer le bon changement de variables....

Énoncé :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$-\frac{2}{x^2}+\frac{9}{x}-4=0$$

Correction :

Correction en vidéo

Auto-évaluation de fin de chapitre :

	0	1	2	3
Déterminer la forme canonique d'un polynôme de degré2.				
Utiliser la forme canonique pour résoudre une équation de degré 2.				
Connaître les formules de cours avec le discriminant.				
Résoudre une équation du second degré avec le discriminant.				
Utiliser la somme et le produit de solutions				
Utiliser le changement de variables.				

0 : Je ne sais pas faire, je ne comprends pas de quoi il s'agit.
1 : Je sais que j'ai du mal avec cette notion, je l'ai assez mal comprise ou oubliée.
2 : Je pense savoir faire.
3 : Je sais que je maîtrise cette notion.