Divisibilité et congruence

Corrigé exercice 20 :

1. On a $337 = 27 \times 12 + 13$ et $0 \leqslant 13 < 27$ est la division euclidienne de 337 par 27. Donc le reste de la division euclidienne de 337 par 27 est 13.
2. On a $337 = 27 \times 12 + 13$ donc $337 = 28 \times 12 + 1$ et $0 \leqslant 1 < 12$. Le reste de la division euclidienne de 337 par 12 est donc 1.

Corrigé exercice 21 :

1. On a $1013 = 125 \times 8 + 13$ et $0 \leqslant 13 < 125$. Donc le reste de la division euclidienne de 1013 par 125 est 13 et le quotient est 8.
2. $1013 = 125 \times 8 + 8 + 5$ donc $1013 = 8 \times 126 + 5$ et $0 \leqslant 5 < 8$. Donc le reste de la division euclidienne de 1013 par 8 est 5 et le quotient est 126.
3. $-1013 = -125 \times 8 - 13 = 125 \times (-9) + 112$ et $0 \leqslant 112 < 125$ est la division euclidienne de -1013 par 125. D'où le reste de la division de -1013 par 125 est 112 et le quotient est -9.

Corrigé exercice 22 :

1. $1027 = 253 \times 4 + 15$ est la division euclidienne de 1027 par 253. Donc le reste de la division euclidienne de 1027 par 253 est 15 et le quotient est 4.
2. $1027 = 253 \times 4 + 3 \times 4 + 3$ donc $1027 = 256 \times 4 + 3$ et $0 \leqslant 3 < 4$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de 1027 par 4 est 3 et le quotient est 256.
3. $-1027 = -256 \times 4 - 3$ donc $-1027 = -257 \times 4 + 1$ et $0 \leqslant 1 < 4$. Ainsi, le reste dans la division euclidienne de -1027 par 4 est 1 et le quotient est -257.

Corrigé exercice 23 :

La division euclidienne de 351 par 10 s'écrit $351 = 35 \times 10 + 1$ (on a bien $0 \leqslant 1 < 10$).
Donc $351 = 10 \times 35 + 1 - 35 + 35 = 11 \times 35 - 34 = 11 \times 31 + 10$ et $0 \leqslant 10 < 11$.
On peut en conclure que dans le reste dans la division euclidienne de 351 par 11 est 10 et le quotient est 31.

Corrigé exercice 24 :

1. $n = 12k + 7$ est la division euclidienne de n par 12 car $0 \leqslant 7 < 12$. Donc le reste de la division de n par 12 est 7 et le quotient est k.
2. $n = 4 \times (3k) + 6 + 1 = 3(4k + 2) + 1$ et $0 \leqslant 1 < 3$. Donc le reste de la division euclidienne de n par 3 est 1 et le quotient est $4k + 2$.

Corrigé exercice 27 :

L'ensemble des diviseurs de 12 est $D_{12} = \{-1; -2; -3; -4; -6; -12; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.
L'ensemble des diviseurs de 50 est $D_{50} = \{-1; -2; -10; -5; -25; -50; 1; 2; 10; 5; 25; 50\}$.
Les diviseurs communs de 12 et 50 sont donc -1, -2, 1 et 2.

Corrigé exercice 29 :

1. $x^2 - y^2 = 12$ équivaut à $(x - y)(x + y) = 12$. On cherche des solutions positives. Ainsi, $x + y$ est positif, tout comme $x - y$ d'après la règle des signes. On commence donc par étudier l'ensemble des diviseurs positifs de 12, qui est $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

   De plus, $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}$ donc $0 \leqslant x - y \leqslant x + y$.

   Les solutions sont donc les solutions des systèmes : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$.

Or $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=12 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=\dfrac{13}{2} \\ y=12-\dfrac{13}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=6 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=4 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=4-\dfrac{7}{2} \end{cases}$.

Le premier et le dernier système n'admettant pas de solutions entières, l'équation $x^2-y^2=12$ admet un unique couple solution dans $\mathbb{N}^2$: $(4;2)$.

2. $x^2-y^2=-15$ équivaut à $y^2-x^2=15$, ce qui est équivalent à $(y-x)(y+x)=15$. On cherche des solutions positives. Ainsi, $x+y$ est positif, tout comme $x-y$ d'après la règle des signes. On commence donc par étudier l'ensemble des diviseurs positifs de 15, qui est $D_{15}=\{1;3;5;15\}$.

   De plus, comme x et y sont entiers, alors $0 \leqslant y-x \leqslant x+y$.

   Les solutions sont donc les solutions des systèmes : $\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=15 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y-x=3 \\ y+x=5 \end{cases}$.

   Or $\begin{cases} y-x=1 \\ y+x=15 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=8 \\ x=7 \end{cases}$ et $\begin{cases} y-x=3 \\ y+x=5 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} y=4 \\ x=1 \end{cases}$.

   Donc les solutions sur $\mathbb{N}^2$ de l'équation $x^2-y^2=-15$ sont $(1;4)$ et $(7;8)$.

Corrigé exercice 31 :

1. Si $2n-7$ divise 5, alors $2n-7$ est un diviseur de 5 et donc $2n-7$ est un élément de l'ensemble $D_5=\{-1;-5;1;5\}$. Les valeurs possibles de n sont donc :

   $2n-7=-1 \Leftrightarrow 2n=6 \Leftrightarrow n=3$

   $2n-7=-5 \Leftrightarrow 2n=2 \Leftrightarrow n=1$

   $2n-7=1 \Leftrightarrow 2n=8 \Leftrightarrow n=4$

   $2n-7=5 \Leftrightarrow 2n=12 \Leftrightarrow n=6$

   Les valeurs possibles de n sont donc 3, 1, 4 et 6.

2. De même, si $n+4$ divise 6, alors $n+4$ appartient à l'ensemble :

   $D_6=\{-1;-2;-3;-6;1;2;3;6\}$.

   Les valeurs possibles de n sont donc –10, –7, –6, –5, –3, –2, –1 et 2.

Corrigé exercice 33 :

D'une part, $4n+1 \mid n-3$ et, d'autre part, $4n+1 \mid 4n+1$. Donc $4n+1$ divise toute combinaison linéaire de$n-3$ et $4n+1$.
En particulier, $4n+1 \mid [4n+1-4(n-3)]$ donc $4n+1 \mid 13$.
Les éventuelles solutions sont donc les diviseurs de 13 : $D_{13}=\{-1,-13,1,13\}$.
De plus, $4n+1 \in \mathbb{N}$ car $n \in \mathbb{N}$, donc $4n+1$ est un diviseur positif de 13.
Donc soit $4n+1=1$ donc $n=0$, soit $4n+1=13$ donc $n=3$.
Réciproquement, si $n=0$, on a $4n+1=1$ et $n-3=-3$. Or $1 \mid -3$ donc 0 est bien solution. De même, si $n=3$, on a $4n+1=13$ et $n-3=0$. Or $13 \mid 0$ donc 3 est bien solution.
En conclusion, les solutions de ce problème sont $n=0$ et $n=3$.

Corrigé exercice 36 :

Soient x et y deux entiers naturels vérifiant $x+y=xy$.
On a, d'une part, $x \mid xy$. Mais comme $xy=x+y$, alors on a $x \mid x+y$. Ainsi, $x \mid x$ et $x \mid x+y$ donc x divise toute combinaison linéaire de x et $x+y$, d'où $x|(x+y-x)$. Ainsi, $x \mid y$.
D'autre part, on a $y \mid xy$, ce qui nous permet de montrer, de la même manière, que $y \mid x$.
On vient donc de montrer que $x \mid y$ d'une part, et, d'autre part, $y \mid x$.
Comme x et y sont tous les jeux positifs, on en déduit que $x=y$.
Ainsi, l'équation se réécrit $2x=x^2$, dont les solutions sont 0 et 2.
Réciproquement, si $x=0$ et $y=0$, l'égalité est bien vérifiée, donc $(0;0)$ est bien solution. Si $x=2$ et $y=2$, alors $2+2=2\times 2$, donc $(2;2)$ est également solution.
En conclusion, les solutions positives de l'équation $x+y=xy$ sont les couples d'entiers naturels $(0;0)$ et $(2;2)$.

Corrigé exercice 38 :

Soit n un entier naturel. On va effectuer une démonstration par disjonction de cas.
Cas n°1 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k$.
Dans ce cas, on a alors $N = 4\left(k(4k+2)(4k-5)(4k+5)\right)$ donc N est divisible par 4.
Cas n°2 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k+1$.
On a alors $N = (4k+1)(4k+3)(4k-4)(4k+6) = 4(4k+1)(4k+3)(k-1)(4k+6)$ donc N est divisible par 4.
Cas n°3 : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k+2$.
On a alors $N = (4k+2)(4k+4)(4k-3)(4k+7) = 4(4k+2)(k+1)(4k-3)(4k+7)$ donc N est divisible par 4.
4ème cas : Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 4k+3$.
On a alors $N = (4k+3)(4k+5)(4k-2)(4k+8) = 4(4k+3)(4k+5)(4k-2)(k+2)$ donc $N est divisible par 4$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, N est divisible par 4.

Corrigé exercice 40 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)^2 = n^2+4n+4$ et $n(n+4)+4 = n^2+4n+4$.
   On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)^2 = n(n+4)+4$.
2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)^2 = n(n+4)+4$. Cette écriture est la division euclidienne de $(n+2)^2$ par n lorsque $0 \leqslant 4 < n$, c'est-à-dire pour $n \geqslant 5$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 5$, le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par n vaut 4.

Corrigé exercice 42 :

La division euclidienne de a par 7 s'écrit $a = 7k+4$ avec k entier.
La division euclidienne de b par 7 s'écrit $b = 7k'+6$ avec k' entier.

1. Ainsi, on a $a+b = 7k+4+7k'+6 = 7(k+k')+10 = 7(k+k'+1)+3$.
   Or $0 \leqslant 3 < 7$, donc 3 est le reste de la division euclidienne de $a+b$ par 7.
2. De même, $a-b = 7(k-k')-2 = 7(k-k'-1)+5$. Or $0 \leqslant 5 < 7$, donc 5 est le reste de la division euclidienne de $a-b$ par 7.

Corrigé exercice 43 :

1. D'après l'énoncé, la division euclidienne de 2512 par b s'écrit $2512 = 54b+r$, où r désigne le reste de cette division. Supposons que ce reste soit égal à 7. On a alors $2512 = 54b+7 \Leftrightarrow 2505 = 54b$. Or 2505 n'est pas divisible par 54.
   Le reste ne peut donc pas être égal à 7.
2. D'après l'énoncé, la division euclidienne de 31631 par b s'écrit $31631 = 253b+r$, où r désigne le reste de cette division. Supposons que ce reste soit égal à 6. On a alors $31631 = 253b+6 \Leftrightarrow 31625 = 253b \Leftrightarrow b = 125$. D'où $0 \leqslant 6 < 125$.
   Le reste peut donc être égal 6.

Corrigé exercice 44 :

D'après l'énoncé, la division euclidienne de 97 par b s'écrit $97 = qb+6$. On en déduit que $qb = 91$. D'une part, les diviseurs de 91 sont –1, 1, 7, –7, 13, –13, –91, 91. D'autre part, le reste de la division euclidienne de 97 par b étant 6, on doit avoir $b > 6$. On en déduit que b et q peuvent prendre les valeurs suivantes : $b = 7$ et $q = 13$, $b = 13$ et $q = 7$ ou $b = 91$ et $q = 1$.

Corrigé exercice 46 :

1. On a $a \equiv 16[5]$. Or $16 \equiv 1[5]$, donc $a \equiv 1[5]$ et $1 < 5$. Le reste de la division euclidienne de a par 5 est donc 1.
2. On a $b \equiv 17[3]$. Or $17 \equiv 2[3]$, donc $a \equiv 2[3]$ et $2 < 3$. Le reste de la division euclidienne de b par 3 est donc 2.

Corrigé exercice 47 :

1. On a $a \equiv 7[13]$ et $b \equiv 4[13]$, d'où :
   a. $a + b \equiv 11[13]$. De plus, $11 < 13$ donc le reste de la division euclidienne de $a + b$ par 13 est 11.
   b. $ab \equiv 28[13]$. Or, $28 \equiv 2[13]$ donc $ab \equiv 2[13]$. De plus, $2 < 13$ donc le reste de la division euclidienne de ab par 13 est 2.
   c. $a^3 \equiv 343[13]$. Or, $343 \equiv 5[13]$ donc $a^3 \equiv 5[13]$. De plus, $5 < 13$ donc le reste de la division euclidienne de a^3 par 13 est 5.
   d. $a^2 - b^2 \equiv 33[13]$. Or, $33 \equiv 7[13]$ donc $a^2 - b^2 \equiv 7[13]$. De plus, $7 < 13$ donc le reste de la division euclidienne de $a^2 - b^2$ par 13 est 7.
2. On a $2b - 3a \equiv 8 - 21[13]$, soit $2b - 3a \equiv 0[13]$, donc $2b - 3a$ est divisible par 13.

Corrigé exercice 50 :

1. On obtient le tableau de congruence suivant.

$n \equiv \ldots [3]$	0	1	2
$n^2 \equiv \ldots [3]$	0	1	1
$2n \equiv \ldots [3]$	0	2	1
$n^2 + 2n \equiv \ldots [3]$	0	0	2

2. On en déduit que $n^2 + 2n$ est divisible par 3 si, et seulement si, $n \equiv 0[3]$ ou $n \equiv 1[3]$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $n = 3k$ ou $n = 3k + 1$.

Corrigé exercice 51 :

On construit le tableau de congruence modulo 3 suivant.

$n \equiv \ldots [6]$	0	1	2	3	4	5
$n + 1 \equiv \ldots [6]$	1	2	3	4	5	0
$2n + 1 \equiv \ldots [6]$	1	3	5	1	3	5
$n(n + 1)(2n + 1) \equiv \ldots [6]$	0	0	0	0	0	0

On en déduit que, pour tout entier n, $n(n + 1)(2n + 1) \equiv 0[6]$ et donc que, pour tout entier n, $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisible par 6.

Corrigé exercice 54 :

1. Prenons, par exemple, 3 et 5 deux nombres impairs consécutifs. On a $3 + 5 = 8$ et 8 est bien divisible par 4.
2. Soient $n = 2k + 1$ et $n' = 2k + 3$ deux entiers impairs consécutifs. On a alors $n + n' = 2k + 1 + 2k + 3 = 4k + 4 = 4(k + 1)$, donc $n + n'$ est bien divisible par 4.

Corrigé exercice 56 :

1. Si 11 divise $n + 3$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 3 = 11k$. Ainsi, $n = 11k - 3$.
   n étant un entier naturel, on doit avoir $k \geqslant 1$. Donc les entiers naturels n vérifiant cette condition sont les entiers n tels qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $n = 11k - 3$.
2. Si 6 divise $3n - 9$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $3n - 9 = 6k$. Ainsi, $n = 2k + 3$. Donc les entiers naturels n vérifiant cette condition sont les entiers n tels qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 3$.

Corrigé exercice 57 :

1. On a, d'une part, $n \mid n + 6$ et, d'autre part, $n \mid n$. Donc n divise toute combinaison linéaire de $n + 6$ et n et, en particulier $n \mid (n + 6 - n)$ donc $n \mid 6$. Ainsi, les solutions possibles sont les diviseurs positifs de 6 : 1, 2, 3 et 6.
   Réciproquement, si $n = 1$, on a $n + 6 = 7$ et $1 \mid 7$ donc 1 est bien solution ; si $n = 2$, on a $n + 6 = 8$ et $2 \mid 8$ donc est bien solution ; si $n = 3$, on a $n + 6 = 9$ et $3 \mid 9$ donc 3 est bien solution ; si $n = 6$, on a $n + 6 = 12$ et $6 \mid 12$ donc 6 est bien solution.
   En conclusion, les solutions de ce problème sont 1, 2, 3 et 6.

2. On a, d'une part, $n-1 \mid n+11$ et, d'autre part, $n-1 \mid n-1$ donc $n-1$ divise toute combinaison linéaire de $n+11$ et $n-1$ et, en particulier, $n-1 \mid (n+11-n+1)$ donc $n-1 \mid 12$. De plus, $n \in \mathbb{N}$ donc $n-1 \geqslant -1$. Ainsi, les valeurs possibles de $n-1$ sont les diviseurs de 12 supérieurs ou égaux à –1 : –1, 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Les valeurs éventuelles de n sont donc 0, 2, 3, 4, 7 et 13.

   Réciproquement, si $n=0$, on a $n-1=-1$, $n+11=12$ et $-1 \mid 12$ donc 0 est bien solution ; si $n=2$, on a $n-1=1$, $n+11=13$ et $1 \mid 13$ donc 2 est bien solution ; si $n=3$, on a $n-1=2$, $n+11=14$ et $2 \mid 14$ donc 3 est bien solution ; si $n=4$, on a $n-1=3$, $n+11=15$ et $3 \mid 15$ donc 4 est bien solution ; si $n=7$, on a $n-1=6$, $n+11=18$ et $6 \mid 18$ donc 7 est bien solution ; si $n=13$, on a $n-1=12$, $n+11=24$ et $12 \mid 24$ donc 13 est bien solution.

   En conclusion, les solutions de ce problème sont 0, 2, 3, 4, 7 et 13.

3. On a, d'une part, $n-3 \mid n+2$ et, d'autre part, $n-3 \mid n-3$ donc $n-3$ divise toute combinaison linéaire de $n+2$ et $n-3$ et, en particulier, $n-3 \mid (n-3)-(n+2)$, c'est-à-dire $n-3 \mid 5$. De plus, $n \in \mathbb{N}$ donc $n-3 \geqslant -3$. Ainsi, les valeurs possibles de $n-3$ sont les diviseurs de 5 supérieurs ou égaux à –3 : –1, 1 et 5. Donc les valeurs possibles de n sont 2, 4 et 8.

   Réciproquement, si $n=2$, on a $n-3=-1$, $n+2=4$ et $-1 \mid 4$ donc 2 est bien solution ; si $n=4$, on a $n-3=1$ et $n+2=6$ et $1 \mid 6$ donc 4 est bien solution ; si $n=8$, on a $n-3=5$, $n+2=10$ et $5|10$ donc 8 est bien solution.

En conclusion, les solutions de ce problème sont 2, 4 et 8.

Corrigé exercice 63 :

1. On obtient $a_1=5$, $a_2=55$ et $a_3=485$. Il semble donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 5 soit un diviseur de a_n.
2. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 5 est un diviseur de a_n.

   Initialisation : On a $a_1=5$ donc la propriété est vraie au rang $n=1$.

   Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier n, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a_n=5k$. Démontrons qu'elle est vraie pour $n+1$, c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $a_{n+1}=5K$.

   On a $a_{n+1}=2^{3(n+1)}-3^{n+1}=2^{3n}\times 8-3^n\times 3=2^{3n}\times 8-3^n\times 8+5\times 3^n=8a_n+5\times 3^n$. Donc, par hypothèse de récurrence, $a_{n+1}=8\times(5k)+5\times 3^n=5(8k+3^n)$ et donc a_{n+1} est divisible par 5.

   Conclusion : On a montré que la propriété est vraie au rang 1, puis que si elle était vraie au rang n, alors elle est vraie au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 5 est un diviseur de a_n.

Corrigé exercice 67 :

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9^n-2^n est divisible par 7.
Initialisation : $9^0-2^0=0$ et 0 est divisible par 7, donc la proposition est vraie pour $n=0$.
Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier n, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $9^n-2^n=7k$. Démontrons qu'elle est vraie pour $n+1$, c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $9^{n+1}-2^{n+1}=7K$.
On a $9^{n+1}-2^{n+1}=9.9^n-2.2^n=9(9^n-2^n)+7.2^n$ donc, par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $9^{n+1}-2^{n+1}=9(7k)+7.2^n=7(9k+2^n)$ donc $9^{n+1}-2^{n+1}$ est divisible par 7.
Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 0, puis que si elle était vraie à une rang n, alors elle était également vraie au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 9^n-2^n est divisible par 7.

Corrigé exercice 68 :

Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n}-5^n$ est divisible par 3.
Initialisation : $2^0-5^0=0$ et 0 est divisible par 3, donc la proposition est vraie pour $n=0$.
Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier n, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{3n}-5^n=3k$. Démontrons qu'elle est vraie pour $n+1$, c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{3(n+1)}-5^{n+1}=3K$.
On a $2^{3(n+1)}-5^{n+1}=2^3\times 2^{3n}-5\times 5^n=3\times 2^{3n}+5\left(2^{3n}-5^n\right)$ d'où, par hypothèse de récurrence, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{3(n+1)}-5^{n+1}=3\times 2^{3n}+5\times 3k=3\left(2^{3n}+k\right)=3K$ en posant $K=2^{3n}+k$. En particulier, K est un entier, d'où $2^{3(n+1)}-5^{n+1}$ est divisible par 3.
Conclusion : On a montré que la propriété était vraie au rang 0, puis que si elle était vraie à une rang n, alors elle était également vraie au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{3n}-5^n$ est divisible par 3.

Corrigé exercice 69 :

On procède par double implication.
Démontrons tout d'abord que : $13 \mid 8a+5b \Rightarrow 13 \mid 5a+8b$.
On a, d'une part, $13 \mid 8a+5b$ et, d'autre part, $13 \mid 13a+13b$. Donc 13 divise toute combinaison linéaire de $8a+5b$ et $13a+13b$. En particulier, $13 \mid 13a+13b-8a-5b$ et donc $13 \mid 5a+8b$.
Démontrons maintenant que : $13 \mid 5a+8b \Rightarrow 13 \mid 8a+5b$.
On a, d'une part, $13 \mid 5a+8b$ et, d'autre part, $13 \mid 13a+13b$. Donc 13 divise toute combinaison linéaire de $5a+8b$ et $13a+13b$. En particulier, $13 \mid 13a+13b-5a-8b$ donc $13 \mid 8a+5b$.
En conclusion, on a $13 \mid 8a+5b \Leftrightarrow 13 \mid 5a+8b$.

Corrigé exercice 70 :

On procède par double implication.
Démontrons tout d'abord que $11 \mid 6a+5b \Rightarrow 11 \mid 5a+6b$.
On a, d'une part, $11 \mid 6a+5b$ et, d'autre part, $11 \mid 11a+11b$. Donc 11 divise toute combinaison linéaire de $6a+5b$ et $11a+11b$. En particulier, $11 \mid 11a+11b-6a-5b$ donc $11 \mid 5a+6b$.
Démontrons maintenant que $11 \mid 5a+6b \Rightarrow 11 \mid 6a+5b$.
On a, d'une part, $11 \mid 5a+6b$ et, d'autre part, $11 \mid 11a+11b$. Donc 11 divise toute combinaison linéaire de $5a+6b$ et $11a+11b$. En particulier, $11 \mid 11a+11b-5a-6b$ donc $11 \mid 6a+5b$.
En conclusion, on a $11 \mid 6a+5b \iff 11 \mid 5a+6b$.

Corrigé exercice 92 :

$54 \equiv 5\,[7]$	$85 \equiv 15\,[7]$	$139 \equiv -1\,[7]$
$25 \equiv 3\,[11]$	$100 \equiv 1\,[11]$	$2500 \equiv 3\,[11]$

Corrigé exercice 93 :

$a \equiv 55\,[26]$ donc $a \equiv 3\,[26]$ et $0 \leqslant 3 < 26$ donc le reste de la division de a par 26 est 3. De même, le reste de la division euclidienne de b par 26 est 6, et le reste de la division euclidienne de c par 26 est 13.

Corrigé exercice 94 :

1. On a $a+b \equiv 11[13]$. Or $0 \leqslant 11 < 13$ donc le reste de la division de $a+b$ par 13 est 11.
2. $ab \equiv 28[13]$ donc $ab \equiv 2[13]$. Or $0 \leqslant 2 < 13$ donc le reste de la division de ab par 13 est 2.
3. $a \equiv 7[13]$ donc $3a \equiv 21[13]$. De plus, $b \equiv 4[13]$ donc $2b \equiv 8[13]$. D'où $2b-3a \equiv -13[13]$ donc $2b-3a \equiv 0[13]$. Or $0 \leqslant 0 < 13$ donc le reste de la division de $2b-3a$ par 13 est 0.
4. $a^2 \equiv 49\,[13]$ donc $a^2 \equiv 10\,[13]$. De même, $b^2 \equiv 3\,[13]$. Donc $a^2+b^2 \equiv 0\,[13]$.

Corrigé exercice 99 :

1. On obtient les tableaux suivants.

$+$	0	1	2		$\times$	0	1	2
0	0	1	2		0	0	0	0
1	1	2	0		1	0	1	2
2	2	0	1		2	0	2	1

2. On remarque dans la table de multiplication modulo 3 que 2 est son propre inverse.

Corrigé exercice 102 :

1. On a, d'une part, $2305 \equiv 1[9]$ donc $2305^{2019} \equiv 1[9]$, et d'autre part $1106 \equiv -1[9]$ donc $1106^{2019} \equiv -1[9]$. Par addition, on a alors $A \equiv 0[9]$. Donc A est divisible par 9.
2. On a $12 \equiv 5[7]$ et, par conséquent, $12^n \equiv 5^n[7]$. On en déduit que $B \equiv 5^n \times 5 - 5^n \times 5[7]$ et donc que $B \equiv 0[7]$. Donc B est divisible par 7.

Corrigé exercice 103 :

1. On a $3^0 \equiv 1[5]$, $3^1 \equiv 3[5]$, $3^2 \equiv 4[5]$, $3^3 \equiv 2[5]$ et $3^4 \equiv 1[5]$.
   On procède donc par disjonction de cas.
   Si $n = 4p$, on a $3^{4p} = (3^4)^p$, d'où $(3^4)^p \equiv 1^n[5]$ et donc $3^{4p} \equiv 1[5]$.
   Si $n = 4p + 1$, on a $3^{4p+1} = 3^{4p} \times 3$ d'où $3^{4p+1} \equiv 3[5]$.
   Si $n = 4p + 2$, on a $3^{4p+2} = 3^{4p} \times 3^2$ d'où $3^{4p+2} \equiv 4[5]$.
   Si $n = 4p + 3$, on a $3^{4p+3} = 3^{4p} \times 3^3$ d'où $3^{4p+1} \equiv 2[5]$.
2. $243 \equiv 3[5]$ et $942 = 4 \times 235 + 2$ donc $243^{942} \equiv 3^2[5] \equiv 4[5]$.

Corrigé exercice 104 :

1. On a $5^0 \equiv 1[6]$, $5^1 \equiv 5[6]$ et $5^2 \equiv 1[6]$.
   Ainsi, si n est de la forme $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $5^n \equiv \left(5^2\right)^k [6] \equiv 1\,[6]$.
   Si n est de la forme $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $5^n \equiv \left(5^2\right)^k \times 5[6] \equiv 5\,[6]$.
2. $15365 \equiv 5[6]$ et $221 = 2 \times 110 + 1$ d'où $15365^{221} \equiv 5[6]$.

Corrigé exercice 105 :

1. On a $9 \equiv 9\,[10]$, $9^2 \equiv 1\,[10]$. Donc si n est de la forme $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $9^n \equiv \left(9^2\right)^k [10] \equiv 1\,[10]$. Et si n est de la forme $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $9^n \equiv \left(9^2\right)^k \times 9\,[10] \equiv 9\,[10]$. Donc $9^{231} \equiv 9\,[10]$. Ainsi, le chiffre des unités de 9^{231} est 9.
2. De même, $4 \equiv 4\,[10]$, $4^2 \equiv 6\,[10]$ et $4^3 \equiv 4\,[10]$. Ainsi, si n est pair, $4^n \equiv 6[10]$ et si n est impair, $4^n \equiv 4[10]$. Donc le chiffre des unités de 4^{125} est 4.