Parcours d'exercices

Limites de suites

2

ANALYSE

Activité 1 : Représentation graphique d'une suite définie par une fonction

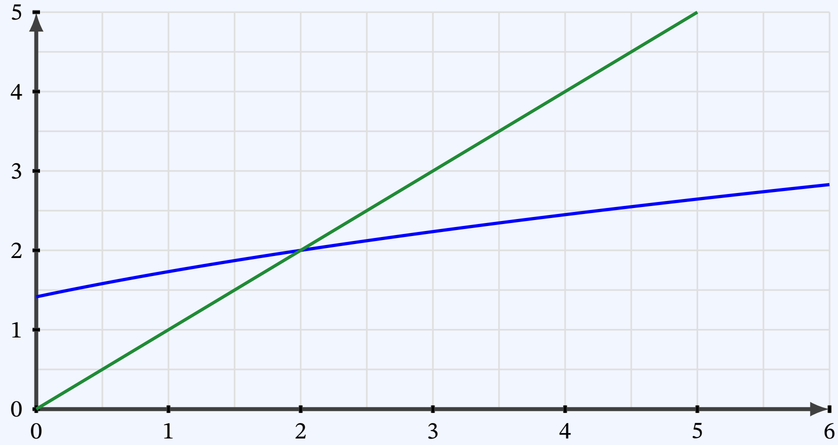
On a représenté sur le graphique ci-dessous, la fonction f définie sur $[0; 9]$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et la droite d'équation $y = x$.
En déduire la représentation graphique des premiers termes de la suite u définie pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ dans ces deux cas distincts :

1) $u_0 = 1$

2) $u_0 = 5$

Que peut-on en déduire sur le comportement de la suite pour de grandes valeurs de n ?

Correction



Activité 2 : Conjecturer une limite finie.

Conjecturer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$.
Est-il possible de trouver un rang n, tel que $u_n > 1000000$?

Correction

Activité 3 : Animation Géogébra

En faisant évoluer le paramètre A observer le paramètre p et la zone dédiée.
Essayer de déduire la définition d'une limite infinie d'une suite.

Activité 4 : Approche de la démonstration d'une limite finie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{3 - 5n}{10n + 2}$. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

Activité 5 : Animation Géogébra

En faisant évoluer le paramètre ε observer le paramètre p et la zone dédiée.
Essayer de déduire la définition d'une limite infinie d'une suite.

Activité 6 : Forme indéterminée d'une somme de limites :

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$ et $v_n = n - n^2$
Conjecturer, à la calculatrice si besoin, la limite de chacune de ces limites ?

Activité 7 : Forme indéterminée d'un produit de limites :

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \dfrac{2}{n}$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$.
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n v_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n w_n)$

Correction

Définition

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est premier} \\ n^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

A-t-on $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$?

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n+6}{n+1}$.

1) Donner des valeurs approchées au centième de u_{10}, u_{100}, u_{1000}
2) La suite (u_n) semble-t-elle convergente ? Quelle serait sa limite ?
3) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$. Quel est le signe de cette quantité ?
4) Soit $\varepsilon > 0$. Résoudre l'inéquation $u_n - 3 < \varepsilon$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$. Conclure

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = (-1)^n$.
La suite (u_n) semble-t-elle avoir une limite ?

Suites géométriques et suites monotones

Exercice 4

Calculer les limites des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n.

1) $u_n = -3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$
2) $v_n = 1 + 2 \times 0,99^n$
3) $w_n = 5 \times 1,99^n + 12$
4) $z_n = 8 + \sqrt{3}\left(-\frac{7}{8}\right)^n$

Exercice 5

Calculer les limites des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n.

1) $u_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$
2) $v_n = 1 + \dfrac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Exercice 6

Soit n un entier naturel. Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ $\quad v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ $\quad w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{8}{4^k}$

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 6$.

1) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
2) Prouver par récurrence que $u_n \geq 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 6.$$
4) Conclure sur le sens de variation de la suite.
5) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$.

1) Prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$u_n \geq 4$.

2) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 2$.

3) Conclure sur le sens de variation de la suite.

4) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Opérations sur les limites

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

1) $u_n = n^2 + \sqrt{n}$
2) $u_n = \frac{1}{n} - n^3$
3) $u_n = e^{-n} + 3n$
4) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + n$
5) $u_n = -6n^2 + 1 + \frac{1}{n}$
6) $u_n = \frac{1+n}{n}$

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

1) $u_n = (2n+1)\left(\frac{1}{n} + 2\right)$
2) $u_n = \left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(\frac{5}{n^2} - 2\right)$
3) $u_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n}$
4) $u_n = \dfrac{e^n}{1 + \frac{1}{n}}$
5) $u_n = \dfrac{6 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1}$
6) $u_n = \dfrac{-1 + \frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}}$

Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n,

1) $u_n = n^2 - n$
2) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)$
3) $u_n = \dfrac{3 + \sqrt{n}}{1 + \frac{2}{n}}$
4) $u_n = -2n^2 - \frac{5}{n+1}$
5) $u_n = \frac{5}{-1-n}$
6) $u_n = (3n+1)\left(\frac{1}{n} - 2\right)$

Formes indéterminées

Exercice 12

En factorisant par le terme dominant, déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

1) $u_n = \dfrac{3n^3 + 2n - 5}{2 - 4n^3}$
2) $u_n = \dfrac{n^2 + 1}{n + 3}$
3) $u_n = \dfrac{1 - 2n^3}{n^2 - 3n^3}$
4) $u_n = \dfrac{1 - 6n^4}{5n^6 + 2n^2 + 1}$
5) $u_n = \dfrac{n^2 - \frac{1}{n^4}}{n^3 + 3}$ pour $n > 0$

Exercice 13

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants

1) $u_n = \sqrt{n-3} - \sqrt{n+8}$ 2) $u_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{2n+5}$
3) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}$

Exercice 14

Pour tout entier naturel $n > 1$, on pose $u_n = \sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - n - 1}$. Déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la suite (u_n).

Théorèmes

Exercice 15

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$u_n = n^2 + \sin(n)$.
Démontrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 16

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par la relation : $u_n = \dfrac{n^2 + \sin(n)}{n+5}$

Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq \dfrac{n^2 - 1}{n+5}$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + \sin(n)}{n+5}$

Exercice 17

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+2}$

Exercice 18

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier non-nul n par la relation : $u_n = 5 - \dfrac{\sin(n^2)}{2\sqrt{n}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Synthèse

Exercice 19 : Suite auxiliaire

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n} \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 3$

3) Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{3 - u_n}$

a) Justifier que pour tout entier naturel n,
$u_n = \dfrac{3a_n - 1}{a_n}$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n,
$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}$. Pour cela, on exprimera a_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis en fonction de u_n, puis en fonction de a_n.

c) En déduire que la suite (a_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

d) Exprimer a_n puis u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

e) Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 20 : Nouvelle-Calédonie – Août 2023

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3}$

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$.

1) Donner v_0

2) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique. On précisera son premier terme et sa raison.

3) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel n

4) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{n + 0.5} - 2$.

5) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 21

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

1) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x - 2}{2x - 1}$. Déterminer le sens de variations de f sur son domaine de définition.

2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 1$

3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = 2$

   b) En déduire une expression de v_n puis de u_n pour tout entier naturel n

   c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 22 : Nouvelle-Calédonie – Août 2023 - 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$.

1) a) Démontrer que $u_1 = 12$.

   b) Déterminer u_2 en détaillant le calcul.

   c) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant n + 1$.

   b) En déduire la limite de la suite (u_n).

3) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - n - 1$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme v_0.

   b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

   c) En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 2 \times 5^n + n + 1$.

   d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4) On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

   a) Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.

   b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

Cette suite tend pas vers $+\infty$. En effet, on rappelle qu'il existe une infinité de nombres premiers, et donc une infinité de valeur de n pour lesquels $u_n = 1$. Prenons en particulier $A = 2$ dans la définition de la limite infinie. On a donc que, pour tout N, il existe un rang $n \geqslant N$ tel que $u_n < 2$: il n'est pas possible d'avoir tous les termes de la suite supérieurs à 2 à partir d'un certain rang. La limite de la suite ne peut donc être $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 2

On a $u_{10} = \dfrac{36}{11} \simeq 3.272$, $u_{100} = \dfrac{306}{101} \simeq 3.030$, $u_{1000} = \dfrac{3006}{1001} \simeq 3.003$. Il semblerait que la suite (u_n) soit convergente, de limite 3.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3n+6}{3+1} - \dfrac{3(n+1)}{n+1} = \dfrac{3n+6-3n-3}{n+1} = \dfrac{3}{n+1}$. Puisque cette valeur est positive, on a $|u_n - 3| = u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$

Soit $\varepsilon > 0$. On a $|u_n - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{3}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{n+1}{3} > \dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, dès que $n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 1$, on a $|u_n - 3| < \varepsilon$. Ainsi, la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Corrigé de l'exercice 3

Les termes de rang pair de cette suite valent 1 alors que les termes de rang impair valent -1. Cette suite n'admet pas de limite.

Corrigé de l'exercice 4

Les termes de rang pair de cette suite valent 1 alors que les termes de rang impair valent -1. Cette suite n'admet pas de limite.

Corrigé de l'exercice 5

a. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$

b. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - n^3\right) = -\infty$

c. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n) = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-n} + 3n) = +\infty$

d. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + n\right) = +\infty$

e. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-6n^2 + 1 + \dfrac{1}{n}\right) = -\infty$

f. Pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{n}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1+n}{n}\right) = 1$

Corrigé de l'exercice 6

g. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} + 2\right) = 2$.
Ainsi, d'après les règles de calcul de la limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\left(\dfrac{1}{n} + 2\right) = +\infty$.

h. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{2}{n}\right) = 3$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{n^2} - 2\right) = -2$. Finalement, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{2}{n}\right)\left(\dfrac{5}{n^2} - 2\right) = 3 \times (-2) = -6$.

i. Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type "$\infty - \infty$". Il faut donc factoriser u_n. Pour tout entier n, $u_n = \sqrt{n}(1 - n^2)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - n^2) = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

j. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{1 + \dfrac{1}{n}} = +\infty$

k. On a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(6 + \dfrac{3}{n^2}\right) = 6$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{n} - 1\right) = -1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6 + \dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{5}{n} - 1} = \dfrac{6}{-1} = -6$.

l. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{3}{n}\right) = 1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ par valeurs supérieures. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + \dfrac{3}{n}}{\dfrac{1}{n^2}} = +\infty$. Il est également possible de remarquer que dans ce cas, pour nous $n > 0$, $u_n = n^2\left(1 + \dfrac{3}{n}\right)$ et utiliser les règles de calcul sur un produit.

Corrigé de l'exercice 7

a. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$

b. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - n^3\right) = -\infty$

c. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n) = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-n} + 3n) = +\infty$

d. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + n\right) = +\infty$

e. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$. Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-6n^2 + 1 + \frac{1}{n}\right) = -\infty$

f. Pour tout entier naturel non nul n, $\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n}$.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right) = 1$

Corrigé de l'exercice 8

g. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + 2\right) = 2$.
Ainsi, d'après les règles de calcul de la limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\left(\frac{1}{n} + 2\right) = +\infty$.

h. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{n^2} - 2\right) = -2$. Finalement, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(\frac{5}{n^2} - 2\right) = 3 \times (-2) = -6$.

i. Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type "$\infty - \infty$". Il faut donc factoriser u_n. Pour tout entier n, $u_n = \sqrt{n}(1 - n^2)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - n^2) = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

j. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{1 + \frac{1}{n}} = +\infty$

k. On a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(6 + \frac{3}{n^2}\right) = 6$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{n} - 1\right) = -1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1} = \frac{6}{-1} = -6$.

l. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right) = 1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ par valeurs supérieures. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}} = +\infty$. Il est également possible de remarquer que dans ce cas, pour nous $n > 0$, $u_n = n^2\left(1 + \frac{3}{n}\right)$ et utiliser les règles de calcul sur un produit.

Corrigé de l'exercice 9

a. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$

b. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^3 = -\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - n^3\right) = -\infty$

c. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (3n) = +\infty$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} (e^{-n} + 3n) = +\infty$

d. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + n\right) = +\infty$

e. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$. Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-6n^2 + 1 + \frac{1}{n}\right) = -\infty$

f. Pour tout entier naturel non nul n, $\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n}$.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
Ainsi, d'après les règles de la limite de la somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right) = 1$

Corrigé de l'exercice 10

g. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + 2\right) = 2$.
Ainsi, d'après les règles de calcul de la limite d'un produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)\left(\frac{1}{n} + 2\right) = +\infty$.

h. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) = 3$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{n^2} - 2\right) = -2$. Finalement, par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(\frac{5}{n^2} - 2\right) = 3 \times (-2) = -6$.

i. Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type "$\infty - \infty$". Il faut donc factoriser u_n. Pour tout entier n, $u_n = \sqrt{n}(1 - n^2)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - n^2) = -\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

j. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{1 + \frac{1}{n}} = +\infty$

k. On a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(6 + \frac{3}{n^2}\right) = 6$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{n} - 1\right) = -1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{6 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1} = \frac{6}{-1} = -6$.

l. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right) = 1$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ par valeurs supérieures. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}} = +\infty$. Il est également possible de remarquer que dans ce cas, pour nous $n > 0$, $u_n = n^2\left(1 + \frac{3}{n}\right)$ et utiliser les règles de calcul sur un produit.

Corrigé de l'exercice 11

m. Si l'on fait la limite de chaque terme de la somme, on aboutit à une forme indéterminée, de type "$\infty - \infty$". Il faut donc factoriser u_n. Pour tout entier naturel n, $u_n = n(n-1)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

n. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right) = 2$.
Ainsi, par limite du produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

o. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(3+\sqrt{n}) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right) = 1$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

p. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n^2 = -\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{5}{n} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

q. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1-n) = -\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

r. D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+1) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-2\right) = -2$. Ainsi, en utilisant la règle des limites sur les produits, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (ne pas oublier la règle des signes).

Corrigé de l'exercice 12

a. Pour tout entier naturel non nul n, $\frac{3n^3+2n-5}{2-4n^3} = \frac{n^3\left(3+\frac{2}{n^2}-\frac{5}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{2}{n^3}-4\right)} = \frac{3+\frac{2}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{\frac{2}{n^3}-4}$.

En appliquant les règles de calcul classiques sur les limites, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n^3+2n-5}{2-4n^3} = -\frac{3}{4}$

b. Pour tout entier naturel non nul n, $\frac{n^2+1}{n+3} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = n\times\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}}$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n+3} = +\infty$

c. Pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1-2n^3}{n^2-3n^3} = \frac{n^3\times\left(\frac{1}{n^3}-2\right)}{n^3\times\left(\frac{1}{n}-3\right)} = \frac{\frac{1}{n^3}-2}{\frac{1}{n}-3}$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-2n^3}{n^2-3n^3} == \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

d. Pour tout entier naturel non nul n, $\frac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1} = \frac{n^4\left(\frac{1}{n^4}-6\right)}{n^6\left(5+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^6}\right)} = \frac{1}{n^2}\times\frac{\frac{1}{n^4}-6}{5+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^6}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^4}-6}{5+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^6}} = -\frac{6}{5}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-6n^4}{5n^6+2n^2+1} = 0$

f. Pour tout entier naturel non nul n, $\frac{n^2-\frac{1}{n^4}}{n^3+3} = \frac{n^2\times\left(1-\frac{1}{n^6}\right)}{n^3\times\left(1+\frac{3}{n^3}\right)} = \frac{1}{n}\times\frac{1-\frac{1}{n^6}}{1+\frac{3}{n^3}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^6}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n^3}\right) = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2-\frac{1}{n^4}}{n^3+3} = 0$

Corrigé de l'exercice 13

a. Pour tout entier naturel $n > 3$,

$$\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8} = (\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8})\times\frac{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}} = \frac{n-3-(\ldots}{\sqrt{n-3}+\ldots}$$

et donc

$$\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8} = -\frac{11}{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+8}}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n-3}-\sqrt{n+8}) = 0$.

b. Attention à ne pas se lancer dans des calculs par pur automatisme, il ne s'agit pas ici d'une forme indéterminée ! $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+5} = +\infty$.

c. Pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{(n+1)-(n+2)} = \ldots$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Corrigé de l'exercice 14

Pour tout entier naturel non nul n,

$$u_n = \sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-n-1}\times\frac{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}$$

En développant le numérateur, on a alors

$$u_n = \frac{n^2+3n-2-(n^2-n-1)}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}} = \frac{4n-1}{\sqrt{n^2+3n-2}+\sqrt{n^2-n-1}}$$

On a en effet

$$\sqrt{n^2+3n-2} = \sqrt{n^2}\times\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}} = n\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}$$

et

$$\sqrt{n^2-n-1} = \sqrt{n^2}\times\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = n\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$$

Ainsi

$$u_n = \frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{4-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\ldots}}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right) = 4$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}\right) = 1$ et

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}\right)=1.$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-n-1}\right)=\frac{4}{1+1}=2$

Corrigé de l'exercice 15

Corrigé de l'exercice 16

Corrigé de l'exercice 17

Corrigé de l'exercice 18

Corrigé de l'exercice 19

$u_1=\frac{9}{6-1}=\frac{9}{5}$, $u_2=\frac{9}{6-\frac{9}{5}}=\frac{9}{\frac{21}{5}}=\frac{45}{21}=\frac{15}{7}$

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$: « $0<u_n<3$ »

- **Initialisation** : Puisque $u_0=1$, on a bien $0<u_0<3$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. Ainsi, $0<u_n<3$ En multipliant par -1, qui est négatif, on a donc $0>-u_n>-3$.
  On ajoute 6 pour avoir $6>6-u_n>3$. On applique alors la fonction inverse qui est décroissante sur $]0;+\infty[$. On a donc $\frac{1}{6}<\frac{1}{6-u_n}<\frac{1}{3}$. Enfin, on multiplie par 9 pour obtenir $\frac{3}{2}<\frac{9}{6-u_n}<3$. Or, puisque $0<\frac{3}{2}$, on a bien $0<u_{n+1}<3$. $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie, P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $a_n=\frac{1}{3-u_n}$. Puisque $a_n\neq 0$, on peut appliquer la fonction inverse à cette égalité. On a alors $\frac{1}{a_n}=3-u_n$.
Ainsi, $u_n=3-\frac{1}{a_n}=\frac{3a_n-1}{a_n}$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $a_n=\frac{1}{3-u_n}$. Ainsi, $a_{n+1}=\frac{1}{3-u_{n+1}}$.
Or, $u_{n+1}=\frac{9}{6-u_n}$. Ainsi $a_{n+1}=\frac{1}{3-\frac{9}{6-u_n}}=\frac{6-u_n}{9-3u_n}$.

Or, d'après la question précédente, $u_n=\frac{3a_n-1}{a_n}$. Ainsi,

$$a_{n+1}=\frac{6-\frac{3a_n-1}{a_n}}{9-3\times\frac{3a_n-1}{a_n}}=\frac{\frac{6a_n-(3a_n-1)}{a_n}}{\frac{9a_n-3\times(3a_n-1)}{a_n}}.$$

On a donc $a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n}\times\frac{a_n}{3}=\frac{3a_n+1}{3}=a_n+\frac{1}{3}$.
La suite (a_n) est donc arithmétique de raison $r=\frac{1}{3}$. Son premier terme vaut $a_0=\frac{1}{3-u_0}=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$. On rappelle que si (a_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n, $a_n=a_0+rn$. Dans notre cas, pour tout entier naturel n, $a_n=\frac{1}{2}+\frac{n}{3}$

On sait que pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{3a_n-1}{a_n}$. Ainsi, pour tout entier naturel n

$$u_n=\frac{3\times\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{3}\right)-1}{\frac{1}{2}+\frac{n}{3}}=\frac{\frac{3}{2}+n-1}{\frac{3+2n}{6}}=\frac{6\times\left(n+\frac{1}{2}\right)}{3+2n}=\frac{6n+3}{3+2n}$$

En utilisant les règles sur les calculs de limites, on aboutit à une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Or, pour tout entier naturel non nul n, $u_n=\frac{n\left(6+\frac{3}{n}\right)}{n\left(\frac{3}{n}+2\right)}=\frac{6+\frac{3}{n}}{\frac{3}{n}+2}$

Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{6}{2}=3$.

Corrigé de l'exercice 20

On a $v_0=\frac{1}{u_0+2}=\frac{1}{2}$

Pour tout entier naturel n, on a $v_n=\frac{1}{u_n+2}$ et donc $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+2}$.
Or, $u_{n+1}=\frac{-u_n-4}{u_n+3}$. On remplace donc u_{n+1} par cette valeur. Ainsi,

$$v_{n+1}=\frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+2}=\frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+\frac{2(u_n+3)}{u_n+3}}=\frac{1}{\frac{-u_n-4}{u_n+3}+\frac{2u_n+6)}{u_n+3}}$$

Ainsi,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{u_n+2}-\frac{1}{u_n+2}=\frac{u_n+2}{u_n+2}=1$$

Finalement, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=1+v_n$. La suite (v_n) est arithmétique de raison 1.
Pour tout entier naturel n, on a donc $v_n=v_0=n\times 1$ soit $v_n=\frac{1}{2}+n$.

Pour tout entier naturel n, on a $v_n=\frac{1}{u_n+2}$. Ainsi, $\frac{1}{v_n}=u_n+2$ et $u_n=\frac{1}{v_n}-2=\frac{1}{n+0.5}-2$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+0.5}=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-2$.

Corrigé de l'exercice 21

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{3u_n-2}{2u_n-1}$.
f est dérivable sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. Pour tout réel $x\neq\frac{1}{2}$,

$$f'(x)=\frac{3(2x-1)-2(3x-2)}{(2x-1)^2}=\frac{6x-3-6x+4}{(2x-1)^2}=\frac{1}{(2x-1)^2}>0$$

f est donc strictement croissante sur $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ et $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $P(n)$: « $u_n>1$ ».

- Initialisation : $u_0=2>0$. $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $u_n>1$. La fonction f étant strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, on a donc $f(u_n)>f(1)$. Or, $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(1)=\frac{3\times 1-2}{2\times 1-1}=1$. Ainsi, $u_{n+1}>1$. $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

Puisque pour tout entier naturel n, $u_n > 1$, il en vient que $u_n - 1 \neq 0$ et la suite (v_n) est donc bien définie.
Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{\frac{3u_n-2}{2u_n-1}-1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{\frac{3u_n-2-(2u_n-1)}{2u_n-1}} - \frac{1}{u_n-1}$$

Ainsi,

$$v_{n+1}-v_n = \frac{2u_n-1}{u_n-1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{2u_n-2}{u_n-1} = \frac{2(u_n-1)}{u_n-1} = 2$$

Finalement, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2+v_n$. La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0-1} = \frac{1}{2-1} = 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = 1 + 2n$.
Par ailleurs, $v_n = \frac{1}{u_n-1}$ et donc $u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{1+2n} + 1$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Corrigé de l'exercice 22