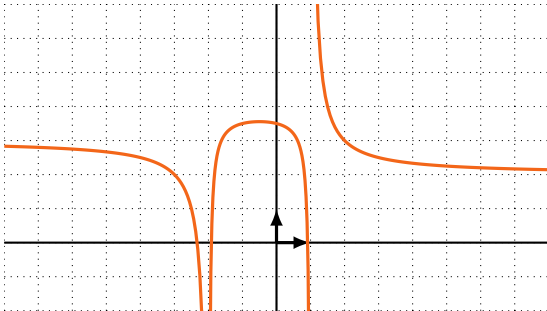


Notion de limite

Exercice 1

On a représenté ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}_f d'une fonction f dans un repère orthonormé.

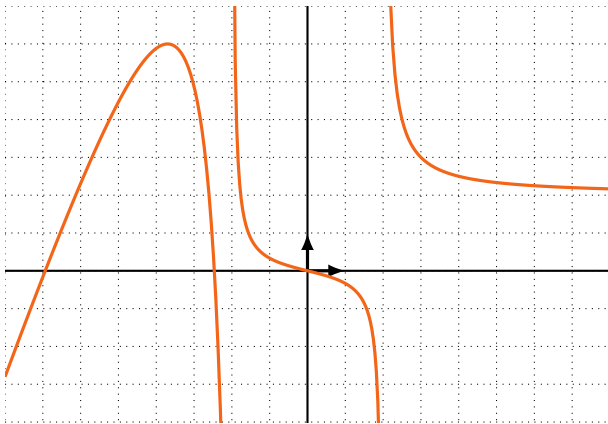


A l'aide de cette représentation graphique, déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes verticales ou horizontales à la courbe représentative de la fonction f ?

Exercice 2

On considère une fonction f dont la courbe représentative \mathcal{C}_f est donnée ci-dessous.



Déterminer graphiquement les valeurs de $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à la courbe \mathcal{C}_f ?

Exercice 3

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donnée ci-dessous. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	$-\infty$	-4	2	5	7	$+\infty$
f	2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	1
		$-\infty$	-3	-3	-3	

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-4)^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-4)^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- Quelles sont les asymptotes horizontales et verticales à \mathcal{C}_f ?
- Dans un repère orthonormé, tracer une courbe d'une fonction compatible avec ce tableau de variations.

Opérations sur les limites

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x - 3)$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x - 3)$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x^2 - 3)$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} \right)$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} \right)$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x + e^{-x}} \right)$

g. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3} + 4\sqrt{x} \right)$

h. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^3} + 4\sqrt{x} \right)$

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x}{1-x} \right)$

j. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2x}{1-x} \right)$

k. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{1-x} \right)$

l. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{1-x} \right)$

m. $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((1 - 2x)e^x)$

n. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1)$

o. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 1)$

p. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x^2+7x-3})$

q. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\exp \left(\frac{1-x^4}{2+x+x^3} \right) \right)$

r. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\exp \left(\frac{1-x^4}{2+x+x^3} \right) \right)$

Exercice 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 4x - 12}{2x^2 + x - 3}$

- 1) Déterminer le domaine de définition D de la fonction f .
- 2) Déterminer les limites de f en $-\infty$, $-\frac{3}{2}^+$, $-\frac{3}{2}^-$, 1^- , 1^+ et $+\infty$.
- 3) Justifier que f est dérivable sur D et exprimer $f'(x)$ pour tout réel x de D .
- 4) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur D .
- 5) Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

Fonctions logarithmes

Exercice 6

On considère une fonction f définie sur \mathbb{R}^+ , de limite finie L en $+\infty$. Montrer que $L \geq 0$.

Dérivabilité

Exercice 7

Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ n'est pas dérivable en 0.

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

D'après cette représentation graphique, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3.$$

De plus,

- La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe de f .
- La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f .
- La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.
- La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.

Corrigé de l'exercice 2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

Par ailleurs,

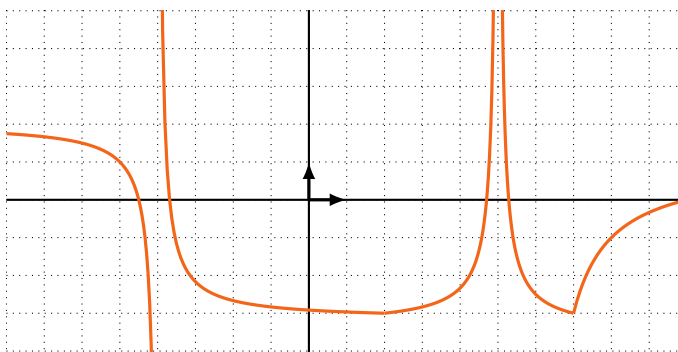
- La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe de f .
- La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe de f .
- La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

Corrigé de l'exercice 3

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow (-4)^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-4)^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

Les droites d'équation $x = -4$ et $x = 5$ sont asymptotes verticales à la courbe de f . La droite d'équation $y = 2$ en est une asymptote horizontale en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ l'est en $+\infty$.



Corrigé de l'exercice 4

a. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x - 3) = +\infty$

b. Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x - 3) = -\infty$

c. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, on a alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x^2 - 3) = +\infty$$

d. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} \right) = 1$.

e. On a que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} \right) = 0$.

f. On a que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x + e^{-x}} \right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x + e^{-x}} \right) = 0$$

g. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^3} + 4\sqrt{x} \right) = +\infty$$

h. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^3} + 4\sqrt{x} \right) = +\infty$$

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) = 0^-$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2x}{1 - x} \right) = -\infty$

j. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0^+$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2x}{1 - x} \right) = +\infty$

k. Pour tout réel $x \neq 1$ et $x \neq 0$, $f(x) = \frac{2}{\frac{1}{x} - 1}$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{1 - x} \right) = -2$$

l. Le même raisonnement permet d'établir que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{1 - x} \right) = -2$$

m. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

n. Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$$

o. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x) = +\infty$. Par somme,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty.$$

p. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 7x - 3) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x^2 + 7x - 3}) = 0$$

q. Pour tout réel non nul x ,

$$\frac{1 - x^4}{2 + x + x^3} = \frac{x^4 \left(\frac{1}{x^4} - 1 \right)}{x^3 \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + 1 \right)} = x \times \frac{\frac{1}{x^4} - 1}{\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + 1}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et donc, en appliquant la règle des signes,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^4}{2 + x + x^3} = +\infty.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Finalement, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\exp \left(\frac{1 - x^4}{2 + x + x^3} \right) \right) = +\infty$

r. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et donc, en appliquant la règle des signes,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^4}{2 + x + x^3} = -\infty. \quad \text{Or, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0. \quad \text{Finalement,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\exp \left(\frac{1 - x^4}{2 + x + x^3} \right) \right) = 0$$

Corrigé de l'exercice 5

1) Les racines du polynôme $2x^2 + x - 3$ sont 1 et $-\frac{3}{2}$; Ainsi,

f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}; 1 \right\}$.

2) Pour tout réel x différent de 0, 1 ou $-\frac{3}{2}$, on a $f(x) =$

$$\frac{x^2}{x^2} \times \frac{1 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{1 - \frac{4}{x} - \frac{12}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Par ailleurs, le tableau de signes de $2x^2 + x - 3$ est le suivant

x	$-\infty$	$-3/2$	1	$+\infty$		
$2x^2 + x - 3$		+	0	-	0	+

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^-} (2x^2 + x - 3) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^-} (x^2 - 4x - 12) = -\frac{15}{4}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^-} f(x) = -\infty$.

Puis $\lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^+} (2x^2 + x - 3) = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^+} (x^2 - 4x - 12) = -\frac{15}{4}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^+} f(x) = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow (1)^-} (2x^2 + x - 3) = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow (1)^-} (x^2 - 4x - 12) = -15$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow (1)^-} f(x) = +\infty$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow (1)^+} (2x^2 + x - 3) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow (1)^+} (x^2 - 4x - 12) = -15$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow (1)^+} f(x) = -\infty$.

3) f est le quotient de deux fonctions dérivables sur chaque intervalle de D , et dont le dénominateur ne s'annule pas sur D . f est donc dérivable sur chaque intervalle de D . Pour tout réel $x \in D$, on a alors

$$f'(x) = \frac{(2x - 4)(2x^2 + x - 3) - (x^2 - 4x - 12)(4x + 1)}{(2x^2 + x - 3)^2}$$

4) Pour tout $x \in D$, $(2x^2 + x - 3)^2 > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $9x^2 + 42x + 24$. Il s'agit d'un polynôme du second degré dont les racines sont -4 et $-\frac{2}{3}$. On peut alors construire le tableau de signes de f' et en déduire les variations de f .

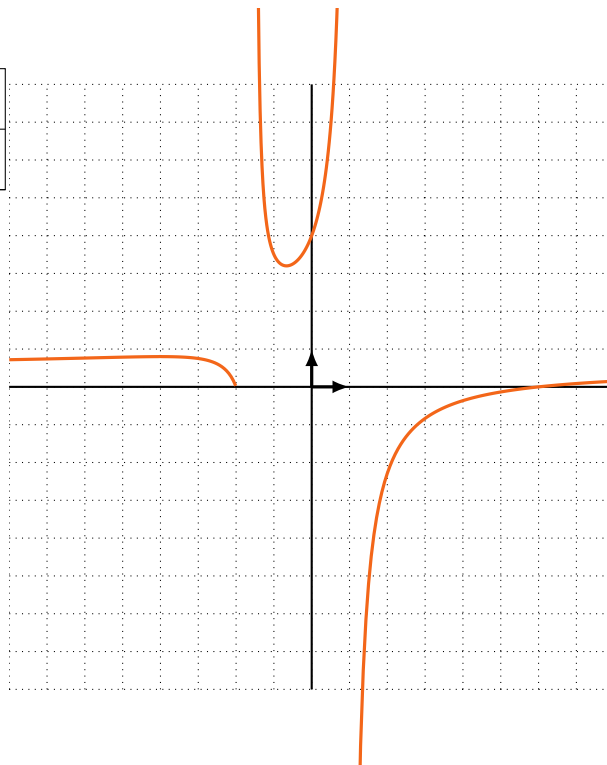
x	$-\infty$	-4	$-3/2$	$-2/3$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f	$-\infty$	$f(-4)$	$-\infty$	$-\infty$	$f(1)$	$+\infty$

Or, $0 \leq e^{-\frac{1}{h^2}} \leq 1$. Donc $\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = \left| \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} \right| = \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} \leq \frac{1}{|h|} = |h|^{-1}$. Or, $\lim_{h \rightarrow 0^+} |h|^{-1} = +\infty$.

5) On trace d'abord les asymptotes à la courbe représentative de f .

D'après les questions précédentes, les droites d'équation $x = -\frac{3}{2}$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales.

De plus, la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$. On peut ensuite tracer la courbe de f .



Corrigé de l'exercice 6

Supposons par l'absurde que $L < 0$. Alors, il existe un réel strictement positif $-\frac{L}{2}$ tel que pour tout réel x de l'ensemble

de définition de f , $f(x) \leq -\frac{L}{2}$. Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x) = -\infty$ ce qui contredit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (car $\ln f$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}^+).

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq 0$

Corrigé de l'exercice 7

Pour tout réel h différent de 0, on a

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}$$

Ainsi, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| \neq 0$, ce qui permet de conclure que f n'est pas dérivable en 0.