

1 Développer - Factoriser

Exercice 1

Développer et réduire les expressions suivantes.

1) $A = (5x + 4)^2$ 2) $B = (4 - 3x)^2$

Exercice 2

Écrire sous forme développée : $A = -2(x-4)(x+4)$

Exercice 3

Développer et réduire les expressions suivantes.

1) $A = (2x + 7)^2 - (3 - x)^2$
2) $B = (4 - 3x)(4 + 3x) - (4x - 3)^2$

Exercice 4

Développer et réduire les expressions suivantes.

1) $A = 3(x - 4)^2 + 7$ 2) $B = -(x - 2)^2 - 5$

Exercice 5

Factoriser les expressions suivantes.

1) $A = -3x^3 + 4x^2 - 5x$
2) $B = (2x - 5)^2 - (3x - 1)(2x - 5)$

Exercice 6

Factoriser (si possible) les expressions suivantes.

1) $A = x^2 - 9$ 3) $C = 4x^2 + 25$
2) $B = (x - 5)^2 - 16$ 4) $D = (1 - 2x)^2 - 1$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 30$$

- 1) Montrer que $f(x) = (2x + 6)(x - 5)$.
2) Montrer que $f(x) = (2x + 2)(x - 3) - 24$.

2 Équations

Exercice 8

Résoudre dans \mathbb{R} : $6x - 6 = -4x - 3$

Exercice 9

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $\frac{2}{7} = \frac{8}{r}$

Exercice 10

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1) $x^2 = 9$ 3) $x^2 + 16 = 0$
2) $x^2 = 3$ 4) $3x^2 - 6 = 0$

Exercice 11

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1) $2x^2 - 10x = 0$ 3) $x^2 + 2x + 1 = 0$
2) $x^2 - 36 = 0$ 4) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Exercice 12

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1) $(9x + 2)(x + 6) - (9x + 2)(-9x + 5) = 0$
2) $(7x - 2)(8x - 5) = (7x - 2)(-7x + 1)$

Exercice 13

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $(2x - 3)^2 - 25 = 0$

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}

par $f(x) = 4x^2 - 7x + 1$. Résoudre $f(x) = 1$.

Exercice 15

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1) $9x^2 - 6x + 4 = 0$ 3) $x^2 = 3x$
2) $(x + 1)^2 - 7 = 0$ 4) $5 - (3 - x)^2 = 0$

Exercice 16

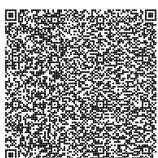
Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $49(x - 5)^2 - 4 = 0$

Test de validation :

Corrections :

Développer-Factoriser

Équations



Note :



Note :



Vers la forme canonique

Exercice 17

- 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$-3x^2 - 30x - 72 = -3(x+5)^2 + 3$$
- 2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3$$

Exercice 18

On donne la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 4$.
Développer $(x+3)^2$ et en déduire une écriture f , telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x+3)^2 + \beta$. On précisera la valeur de β

Exercice 19

On donne la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10x + 9$.
Déterminer une écriture de f , telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-\alpha)^2 + \beta$. On précisera la valeur de α et de β .

Exercice 20

On donne la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 24x + 96$.
Déterminer une écriture de f , telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x+3)^2 + \beta$ où a et β sont des réels que l'on précisera.

Exercice 21

On donne une fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 12x + 5$.
Déterminer une écriture de f , telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -3(x-\alpha)^2 + \beta$.
On précisera la valeur de α et de β .

Exercice 22

On donne une fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 40x + 96$.
Factoriser $f(x)$ par 4 puis en développant $(x+5)^2$ en déduire une écriture f , telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 4(x+5)^2 + \beta$.
On précisera la valeur de β

Forme canonique

Exercice 23

On donne une fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 8x + 9$.
Déterminer une écriture de f , telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
On précisera la valeur de a , α et de β .

Exercice 24

Déterminer, en appliquant les formules de cours, la forme canonique de chacun des polynômes P , défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

- 1) $P(x) = -4x^2 + 8x - 9$
- 2) $P(x) = x^2 - 8x + 20$



MathALÉA

Exercice 25

En effectuant la démonstration algébrique, déterminer la forme canonique de chacun des fonctions P , définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

- 1) $P(x) = -x^2 - 8x - 13$
- 2) $P(x) = -4x^2 + 24x - 35$

Exercice 26

Utiliser la forme canonique pour résoudre dans \mathbb{R} :

- 1) $3x^2 + 4x + 3 = 0$
- 2) $-4x^2 - 2x + 1 = 0$
- 3) $-x^2 + 5x + 3 = 0$



MathALÉA

Test de validation :

Forme canonique



Note :

Corrections :



Équations du second degré

Exercice 27

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

1) $-x^2 - 6x - 8 = 0$

2) $5x^2 + 10x + 10 = 0$

3) $4x^2 - 8x - 12 = 0$



MathALÉA

Exercice 28

Résoudre les équations suivantes en utilisant la formule quadratique.

1) $2x - 63 = -x^2$

2) $2x + 1 + 10x^2 = 0$

3) $-118 - 25x + 4x^2 = 10 + 6x^2 + 7x$



MathALÉA

Exercice 29

Déterminer, suivant la valeur du paramètre m , le **nombre de solutions** de l'équation du second degré :

$$x^2 - m - 2x - 2 = 0$$



MathALÉA

Exercice 30

Soit m un réel.

Déterminer, si elles existent, les valeurs de m pour que l'équation $x^2 + 3x + m^2 = 0$ admette 1 comme solution.

Mathsguyon

Exercice 31

Résoudre dans \mathbb{R}

$$5x^3 - 2x^2 + 5x = 0$$

Mathsguyon

Exercice 32

Résoudre dans \mathbb{R}

$$(x^2 - 3x + 5)(4x^2 - 5x + 1) = 0$$

Mathsguyon

Exercice 33

Résoudre dans \mathbb{R}

$$\frac{2x}{x^2 + 3} = 1$$

Mathsguyon

Exercice 34

Résoudre dans \mathbb{R}

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{2x - 1} = 1$$

Mathsguyon

Exercice 35

Résoudre dans \mathbb{R}

$$3x^4 + 5x^2 - 1 = 0$$

Mathsguyon

Exercice 36

Résoudre dans \mathbb{R}

$$4x - 3\sqrt{x} - 1 = 0$$

Mathsguyon

Exercice 37

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 8. \text{ (Forme développée)}$$

1) Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :

$$f(x) = (x + 4)(x - 2). \text{ (Forme factorisée)}$$

2) Montrer que $f(x)$ peut aussi s'écrire :

$$f(x) = (x + 1)^2 - 9. \text{ (Forme canonique)}$$

3) Répondre aux questions suivantes en utilisant l'écriture de $f(x)$ la mieux adaptée :

a) Résoudre l'équation $f(x) = -9$.

b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

c) Calculer $f(0)$, $f(-4)$ puis $f(-1)$.

d) Résoudre l'équation $f(x) = -8$.



MathALÉA

Exercice 38

Déterminer une équation du second degré, ayant 3 et 7 comme solutions.

Mathsguyon

Exercice 39

Déterminer deux nombres réels dont la somme est 12 et le produit -2 .

Mathsguyon

Exercice 40

Existe-t-il un rectangle d'aire 20 et de périmètre 8 ?

Mathsguyon

Test de validation :

Résoudre une Équation du second degré



Note : /5



(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

1) $25x^2 + 40x + 16$

2) $9x^2 - 24x + 16$

Corrigé de l'exercice 2

1) $-2x^2 + 32$

Corrigé de l'exercice 3

1) $3x^2 + 34x + 40$

2) $-25x^2 + 24x + 7$

Corrigé de l'exercice 4

1) $3x^2 - 24x + 55$

2) $-x^2 + 4x - 9$

Corrigé de l'exercice 5

1) $A = x(x - 9)$

3) $C = (2x - 5)(-x - 4)$

2) $B = x(-3x^2 + 4x - 5)$

Corrigé de l'exercice 6

1) $A = (x - 3)(x + 3)$

3) Pas factorisable

2) $B = (x - 9)(x - 1)$

4) $D = -2x(2 - 2x) = 4x(x - 1)$

Corrigé de l'exercice 7

1) Développez $(2x + 6)(x - 5)$.

2) Développez $f(x) = (2x + 2)(x - 3) - 24$.

Corrigé de l'exercice 8

$$6x - 6 = -4x - 3$$

On ajoute $4x$ aux deux membres.

$$6x - 6 + 4x = -4x + -3 + 4x$$

$$10x - 6 = -3$$

On ajoute 6 aux deux membres.

$$10x - 6 + 6 = -3 + 6$$

$$10x = 3$$

On divise les deux membres par 10 .

$$10x \div 10 = 3 \div 10$$

$$x = \frac{3}{10}$$

La solution est $\frac{3}{10}$.

Corrigé de l'exercice 9

$$\frac{2}{7} = \frac{8}{r}$$

Les produits en croix sont égaux.

$$2 \times r = 7 \times 8$$

On divise les deux membres par 2 .

$$\frac{2 \times r}{2} = \frac{7 \times 8}{2}$$

On simplifie et on calcule.

$$r = 28$$

Corrigé de l'exercice 10

1) $S = \{-3; 3\}$

Soit $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$ qui donne les deux solutions ci-dessus.

2) $x^2 = 3$ équivaut à $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.

Les solutions sont donc $x_1 = \sqrt{3}$ et $x_2 = -\sqrt{3}$.

Il est équivalent de résoudre $x^2 - 3 = 0$, c'est-à-dire

$$x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0.$$

3) $S = \emptyset$

4) $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

Corrigé de l'exercice 11

1) $S = \{0; 5\}$

3) $S = \{-1\}$

2) $S = \{-6; 6\}$

4) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

Corrigé de l'exercice 12

1) $(9x + 2)(x + 6) - (9x + 2)(-9x + 5) = 0$

On observe que $(9x + 2)$ est un facteur commun dans les deux termes :

$$(9x + 2)(x + 6) - (9x + 2)(-9x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x + 2)\left((x + 6) - (-9x + 5)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x + 2)(x + 6 + 9x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x + 2)(10x + 1) = 0$$

On reconnaît une équation produit-nul, donc on applique la propriété :

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$$\Leftrightarrow 9x + 2 = 0 \quad \text{ou bien} \quad 10x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{9} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{10}$$

On en déduit : $S = \left\{-\frac{2}{9}; -\frac{1}{10}\right\}$

2) Deux nombres sont égaux si et seulement si leur différence est nulle.

$$(7x - 2)(8x - 5) = (7x - 2)(-7x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (7x - 2)(8x - 5) - (7x - 2)(-7x + 1) = 0$$

On observe que $(7x - 2)$ est un facteur commun dans les deux termes :

$$(7x - 2)(8x - 5) - (7x - 2)(-7x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (7x - 2)\left((8x - 5) - (-7x + 1)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (7x - 2)(8x - 5 + 7x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (7x - 2)(15x - 6) = 0$$

On reconnaît une équation produit-nul, donc on applique la propriété :

Un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

$$(7x - 2)(15x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 15x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x = 2 \quad \text{ou} \quad 15x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \quad \text{ou} \quad x = \frac{6}{15}$$

On en déduit : $S = \left\{\frac{2}{7}; \frac{2}{5}\right\}$

Corrigé de l'exercice 13

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:

$$(2x - 3)^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow ((2x - 3))^2 - 2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ((2x - 3) - 2)((2x - 3) + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 5)(2x - 1) = 0$$

Propriété du produit nul

$$S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right\}$$

Corrigé de l'exercice 14

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 7x + 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 7x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(4x - 7) &= 0 \\ \text{Propriété du produit nul} \\ S &= \left\{0; \frac{7}{4}\right\}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 15

$$\begin{array}{ll}1) S = \left\{\frac{2}{3}\right\} & 3) S = \{0; 3\} \\ 2) S = \{-1 - \sqrt{7}; -1 + \sqrt{7}\} & 4) S = \{3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5}\}\end{array}$$

Corrigé de l'exercice 16

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:

$$\begin{aligned}49(x - 5)^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (7(x - 5))^2 - 2^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (7(x - 5) - 2)(7(x - 5) + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (7x - 35 - 2)(7x - 35 + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (7x - 37)(7x - 33) &= 0 \\ \text{Propriété du produit nul} \\ S &= \left\{\frac{33}{7}; \frac{37}{7}\right\}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 17

Il suffit de développer !!

Corrigé de l'exercice 18

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 &= x^2 + 6x + 9 \\ f(x) = x^2 + 6x + 4 &= \underline{x^2 + 6x + 9} - 5 = (x + 3)^2 - 5 \\ \beta &= -5\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 19

$$f(x) = (x - 5)^2 - 16$$

$$\alpha = 5 \text{ (Attention au signe!!) et } \beta = -16.$$

Corrigé de l'exercice 20

$$f(x) = 4(x + 3)^2 + 60 \quad a = 4 \text{ et } \beta = 60.$$

Corrigé de l'exercice 21

$$\begin{aligned}f(x) &= -3(x - 2)^2 + 17 \\ \alpha &= 2 \quad (\text{Attention au signe!!) et } \beta = 17.\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 22

$$\begin{aligned}f(x) &= 4x^2 + 40x + 96 = 4(x^2 + 10x + 24) \\ (x + 5)^2 &= x^2 + 10x + 25\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}f(x) &= 4(x^2 + 10x + 24) \\ &= 4(x^2 + 10x + 25 - 1) \\ &= 4((x + 5)^2 - 1) \\ &= 4(x + 5)^2 - 4 \\ \beta &= -4\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 23

$$f(x) = 4(x - 1)^2 + 5$$

Corrigé de l'exercice 24

- 1) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$. Avec l'énoncé : $a = -4$ et $b = 8$, on en déduit que $\alpha = 1$. On calcule alors $\beta = P(1)$, et on obtient au final que $\beta = -5$. d'où, $P(x) = -4(x - 1)^2 + (-5)$. Au final, $P(x) = -4(x - 1)^2 - 5$.
- 2) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$. Avec l'énoncé : $a = 1$ et $b = -8$, on en déduit que $\alpha = 4$. On calcule alors $\beta = P(4)$, et on obtient au final que $\beta = 4$. d'où, $P(x) = 1(x - 4)^2 + 4$. Au final, $P(x) = (x - 4)^2 + 4$.

Corrigé de l'exercice 25

- 1) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$. Avec l'énoncé : $a = -1$ et $b = -8$, on en déduit que $\alpha = -4$. On calcule alors $\beta = P(-4)$, et on obtient au final que $\beta = 3$. d'où, $P(x) = -1(x - (-4))^2 + 3$. Au final, $P(x) = -(x + 4)^2 + 3$.
- 2) On sait que si le polynôme, sous forme développée, s'écrit $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors sa forme canonique est de la forme $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$. Avec l'énoncé : $a = -4$ et $b = 24$, on en déduit que $\alpha = 3$. On calcule alors $\beta = P(3)$, et on obtient au final que $\beta = 1$. d'où, $P(x) = -4(x - 3)^2 + 1$. Au final, $P(x) = -4(x - 3)^2 + 1$.

Corrigé de l'exercice 26

- 1) On veut résoudre dans \mathbb{R} l'équation $3x^2 + 4x + 3 = 0$ (1). On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$. La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique, c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$, On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici 3.
- $$(1) \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 0$$
- On reconnaît le début d'une identité remarquable :
- $$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$$
- On en déduit que : $x^2 + \frac{4}{3}x = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}$
- Il vient alors :
- $$x^2 + \frac{4}{3}x + 1 = 0$$
- $$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9} = 0$$

L'équation revient à ajouter deux nombres positifs, dont un non-nul. Cette somme ne peut pas être égale à zéro.

On en déduit que $S = \emptyset$

2) On veut résoudre dans \mathbb{R} l'équation $-4x^2 - 2x + 1 = 0$ (1).

On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique,

c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$,

On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici -4 .

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$$\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$$

$$\text{On en déduit que : } x^2 + \frac{1}{2}x = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

Il vient alors :

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{5}{16} = 0$$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:

$$\text{avec } a = \left(x + \frac{1}{4}\right) \text{ et } b = \sqrt{\frac{5}{16}} = \sqrt{\frac{5}{4^2}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

L'équation à résoudre est équivalente à :

$$\left(x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}\right) \left(x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right) \left(x + \frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right) = 0$$

On applique la propriété du produit nul :

$$\text{Soit } x + \frac{1 - \sqrt{5}}{4} = 0, \text{ soit } x + \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = 0$$

$$\text{Soit } x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \text{ soit } x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

$$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}; \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \right\}$$

3) On veut résoudre dans \mathbb{R} l'équation $-x^2 + 5x + 3 = 0$ (1).

On reconnaît une équation du second degré sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

La consigne nous amène à commencer par écrire le polynôme du second degré sous forme canonique,

c'est à dire sous la forme : $a(x - \alpha)^2 + \beta$,

On commence par diviser les deux membres de l'égalité par le coefficient a qui vaut ici -1 .

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0$$

On reconnaît le début d'une identité remarquable :

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 - 5x + \frac{25}{4}$$

$$\text{On en déduit que : } x^2 - 5x = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

Il vient alors :

$$x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{37}{4} = 0$$

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$:
avec $a = \left(x - \frac{5}{2}\right)$ et $b = \sqrt{\frac{37}{4}} = \sqrt{\frac{37}{2^2}} = \frac{\sqrt{37}}{2}$

L'équation à résoudre est équivalente à :

$$\left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2}\right) \left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{5 + \sqrt{37}}{2}\right) \left(x - \frac{5 - \sqrt{37}}{2}\right) = 0$$

On applique la propriété du produit nul :

$$\text{Soit } x - \frac{5 + \sqrt{37}}{2} = 0, \text{ soit } x - \frac{5 - \sqrt{37}}{2} = 0$$

$$\text{Soit } x = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}, \text{ soit } x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{37}}{2}; \frac{5 + \sqrt{37}}{2} \right\}$$

Corrigé de l'exercice 27

1) $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 4$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{4}}{-2} = -4$$

$$x_2 = \frac{6 + \sqrt{4}}{-2} = -2$$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $\mathcal{S} = \{-4; -2\}$.

3) $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times (-12) = 256$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{256}}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{8 + \sqrt{256}}{8} = 3$$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $\mathcal{S} = \{-1; 3\}$.

2) $\Delta = 10^2 - 4 \times 5 \times 10 = -100$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution.

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Corrigé de l'exercice 28

1) $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 4$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{4}}{-2} = -4$$

$$x_2 = \frac{6 + \sqrt{4}}{-2} = -2$$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $\mathcal{S} = \{-4; -2\}$.

3) $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times (-12) = 256$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{256}}{8} = -1$$

$$x_2 = \frac{8 + \sqrt{256}}{8} = 3$$

L'ensemble des solutions de cette équation est : $\mathcal{S} = \{-1; 3\}$.

2) $\Delta = 10^2 - 4 \times 5 \times 10 = -100$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution.

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Corrigé de l'exercice 29

Écrivons l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x^2 - 2x - m - 2 = 0$$

On a donc $a = 1$, $b = -2$ et $c = -m - 2$

Le discriminant vaut $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c = 4 - 4(-m - 2)$

Ou encore, sous forme développée : $\Delta = 4m + 12$

Cherchons la valeur de m qui annule cette expression du premier degré : $m = -3$

Δ est une droite croissante de coefficient directeur 4.

Conclusion :

- Si $m < -3$, l'équation n'a pas de solution réelle;

- Si $m = -3$, l'équation a une unique solution réelle ;

- Si $m > -3$, l'équation a 2 solutions réelles ;

Corrigé de l'exercice 30

Corrigé en ligne.

Corrigé de l'exercice 31

Réolvons l'équation suivante dans \mathbb{R} :

$$5x^3 - 2x^2 + 5x = 0$$

Tout d'abord, nous remarquons que nous pouvons factoriser par x :

$$x(5x^2 - 2x + 5) = 0$$

Cette équation produit deux cas possibles :

1. $x = 0$

2. $5x^2 - 2x + 5 = 0$

Examinons maintenant la seconde équation :

$$5x^2 - 2x + 5 = 0$$

Le discriminant Δ de cette équation est donné par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

où $a = 5$, $b = -2$, et $c = 5$. Calculons :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 \times 5 = 4 - 100 = -96$$

Puisque $\Delta < 0$, l'équation quadratique $5x^2 - 2x + 5 = 0$ n'a pas de solution réelle.

Ainsi, la seule solution réelle de l'équation originale est :

$$\boxed{x = 0}$$

Corrigé de l'exercice 32

Pour résoudre l'équation suivante dans \mathbb{R} :

$$(x^2 - 3x + 5)(4x^2 - 5x + 1) = 0$$

il faut résoudre séparément chacune des équations suivantes :

1. $x^2 - 3x + 5 = 0$

2. $4x^2 - 5x + 1 = 0$

1. Résolution de $x^2 - 3x + 5 = 0$

Le discriminant Δ_1 de cette équation est donné par :

$$\Delta_1 = b^2 - 4ac$$

où $a = 1$, $b = -3$, et $c = 5$. Calculons :

$$\Delta_1 = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 9 - 20 = -11$$

Puisque $\Delta_1 < 0$, l'équation $x^2 - 3x + 5 = 0$ n'a pas de solution réelle.

2. Résolution de $4x^2 - 5x + 1 = 0$

Le discriminant Δ_2 de cette équation est donné par :

$$\Delta_2 = b^2 - 4ac$$

où $a = 4$, $b = -5$, et $c = 1$. Calculons :

$$\Delta_2 = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 25 - 16 = 9$$

Puisque $\Delta_2 > 0$, l'équation $4x^2 - 5x + 1 = 0$ a deux solutions réelles données par :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta_2}}{2a}$$

Cela donne les solutions :

$$x_1 = \frac{5+3}{8} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$$

Conclusion

L'équation initiale a donc deux solutions réelles :

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{4}$$

Corrigé de l'exercice 33

Le dénominateur $x^2 + 3$ ne peut pas être nul, car il est toujours positif pour tous les réels x . Donc, il n'y a pas de restriction sur le domaine de définition de cette équation.

Revenons à l'équation $\frac{2x}{x^2 + 3} = 1$:

Multiplions des deux côtés de l'équation par $x^2 + 3$ puisqu'il est non-nul, pour éliminer le dénominateur :

$$\begin{aligned} 2x &= x^2 + 3 \\ x^2 - 2x + 3 &= 0 \\ x^2 - 2x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation n'a pas de solutions réelles, car le discriminant $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$ est négatif ($\Delta < 0$).

Donc, l'équation $\frac{2x}{x^2 + 3} = 1$ n'a pas de solutions réelles dans \mathbb{R} .

Corrigé de l'exercice 34

Pour résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{2x-1} = 1$$

étudions d'abord le domaine de définition. Nous devons éviter les valeurs de x pour lesquelles le dénominateur devient nul. Ainsi, nous excluons les valeurs qui rendent x égal à zéro et celles qui rendent $2x - 1$ égal à zéro.

1. Pour exclure les valeurs qui rendent x égal à zéro, nous avons $x \neq 0$.

2. Pour exclure les valeurs qui rendent $2x - 1$ égal à zéro, nous avons $2x - 1 \neq 0$, ce qui signifie $x \neq \frac{1}{2}$.

Ainsi, le domaine de définition de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$, c'est-à-dire tous les réels sauf zéro et $\frac{1}{2}$.

Maintenant, résolvons l'équation en plaçant toute l'expression au même dénominateur. Multiplions des deux côtés de l'équation par le dénominateur commun $2x(x-1)$ pour éliminer les fractions :

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} - \frac{1}{2x-1} &= 1 \\ \frac{3(2x-1)}{x(2x-1)} - \frac{x}{x(2x-1)} &= \frac{x(2x-1)}{x(2x-1)} \\ 3(2x-1) - x &= x(2x-1) \\ 5x - 3 - 2x^2 + x &= 0 \\ -2x^2 + 6x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Cette équation admet deux solutions, au final : $S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right\}$

Corrigé de l'exercice 35

Pour résoudre l'équation du second degré $3x^4 + 5x^2 - 1 = 0$ dans \mathbb{R} , commençons par poser $y = x^2$.

L'équation devient alors :

$$3y^2 + 5y - 1 = 0$$

Calculons d'abord le discriminant Δ de cette équation du second degré :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-1)$$

$$\Delta = 25 + 12$$

$$\Delta = 37$$

Maintenant, nous pouvons trouver les solutions y_1 et y_2 séparément :

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

En substituant les valeurs appropriées :

$$y_1 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2 \times 3}$$

$$y_2 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2 \times 3}$$

Ensuite, pour trouver les solutions de l'équation d'origine x , prenons la racine carrée des valeurs de y : Comme $y_2 < 0$, il est impossible de trouver des solutions à $x^2 = y_2$. Il reste à résoudre :

$$x_1 = \sqrt{y_1}$$

$$x_2 = -\sqrt{y_1}$$

Ainsi, les solutions réelles de l'équation $3x^4 + 5x^2 - 1 = 0$ dans \mathbb{R} sont :

$$x_1 = \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{37}}{6}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-5 + \sqrt{37}}{6}}$$

Ce sont les deux solutions réelles de l'équation.

Corrigé de l'exercice 36

L'équation n'est définie que sur $D = \mathbb{R}_+$, pour que la racine carrée existe.

Commençons par poser $X = \sqrt{x}$. On a nécessairement $X \geq 0$

L'équation devient :

$$4X^2 - 3X - 1 = 0$$

Calculons d'abord le discriminant Δ de cette équation du second degré :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= (-3)^2 - 4 \times 4 \times (-1) \\ \Delta &= 9 + 16 \\ \Delta &= 25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ X_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\end{aligned}$$

En substituant les valeurs appropriées :

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 4} \\ X_2 &= \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 4}\end{aligned}$$

Simplifions ces expressions :

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{3 + 5}{8} \\ X_2 &= \frac{3 - 5}{8}\end{aligned}$$

Donc, les solutions X_1 et X_2 sont respectivement :

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{8}{8} = 1 \\ X_2 &= -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$X_2 < 0$ donc cette solution n'est pas acceptable.

Maintenant, rappelons que $X = \sqrt{x}$. Pour trouver les solutions, prenons le carré de ces valeurs :

$$x_1 = (X_1)^2 = 1^2 = 1$$

Donc, les solutions réelles de l'équation $4x - 3\sqrt{x} - 1 = 0$ dans \mathbb{R} sont $x_1 = 1$

Corrigé de l'exercice 37

1) On développe la forme factorisée :

$$\begin{aligned}(x + 4)(x - 2) &= x^2 - 2x + 4x - 8 \\ &= x^2 + 2x - 8 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

On retrouve la forme développée, donc on en déduit que $f(x)$ peut s'écrire sous forme factorisée : $f(x) = (x + 4)(x - 2)$.

2) On développe la forme canonique :

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 - 9 &= (x^2 + 2x + 1) - 9 \\ &= x^2 + 2x - 8\end{aligned}$$

On en déduit que $f(x)$ s'écrit sous forme canonique : $f(x) = (x + 1)^2 - 9$.

3) **a.** En utilisant la forme canonique, cela revient à résoudre une équation avec un carré isolé.

$$\begin{aligned}
f(x) = -9 &\Leftrightarrow (x+1)^2 - 9 = -9 \\
&\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x+1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -1
\end{aligned}$$

L'équation a une solution : -1 .

b. En utilisant la forme factorisée, cela revient à résoudre une équation produit-nul.

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x+4)(x-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x+4 = 0 \quad \text{ou} \quad x-2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = -4 \quad \text{ou} \quad x = 2
\end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : -4 et 2 .

c. • Pour déterminer $f(0)$, les calculs à partir de la forme développée sont plus rapides :

$$f(0) = 0^2 + 2 \times 0 + 2 - 8 = -8$$

• Pour déterminer $f(-4)$, les calculs à partir de la forme factorisée sont plus rapides :

$$f(-4) = (-4+4)(-4-2) = 0 \times (-6) = 0$$

• Pour déterminer $f(-1)$, les calculs à partir de la forme canonique sont plus rapides :

$$f(-1) = (-1+1)^2 - 9 = 0 - 9 = -9$$

d. On remarque que -8 est la constante de la forme développée.

En utilisant la forme développée, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(x) = -8 &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = -8 \\
&\Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \\
&\Leftrightarrow x(x+2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x+2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2
\end{aligned}$$

L'équation a deux solutions : 0 et -2 .

Corrigé de l'exercice 38

Pour déterminer une équation du second degré ayant 3 et 7 comme solutions, nous utilisons la forme de l'équation quadratique basée sur la somme S et le produit P des racines.

Forme de l'équation

Si les racines de l'équation sont 3 et 7 , alors l'équation du second degré peut s'écrire sous la forme :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

où :

- S est la somme des racines : $S = 3 + 7 = 10$,
- P est le produit des racines : $P = 3 \times 7 = 21$.

Équation finale

En substituant S et P dans l'équation, on obtient :

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

Ainsi, l'équation du second degré ayant 3 et 7 comme solutions est :

$$\boxed{x^2 - 10x + 21 = 0}$$

Corrigé de l'exercice 39

Appelons x et y les deux nombres cherchés.

et $S = x + y$ et $P = xy$ la somme et le produit des deux inconnues.

On sait que s'il existe des solutions, elle vérifient l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 12x - 2 = 0$$

Nous pouvons commencer par calculer le discriminant, qui est donné par la formule :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Dans notre cas, $a = 1$, $b = -12$ et $c = -2$, donc :

$$\Delta = (-12)^2 - 4(1)(-2)$$

$$\Delta = 144 + 8$$

$$\Delta = 152$$

L'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Les deux solutions de l'équation du second degré sont $x = 6 + \sqrt{38}$ et $x = 6 - \sqrt{38}$.

Corrigé de l'exercice 40

Existe-t-il un rectangle d'aire 20 et de périmètre 8 ?

Soit x la longueur du rectangle et y sa largeur. Le périmètre d'un rectangle est donné par $P = 2(x + y)$ et l'aire par $A = xy$. Nous avons les équations suivantes :

$$P = 2(x + y)$$

$$A = xy$$

Nous savons que le périmètre est égal à 8 et l'aire est égale à 20. Nous pouvons donc écrire le système d'équations suivant :

$$2(x + y) = 8$$

$$xy = 20$$

Divisons la première équation par 2 pour obtenir :

$$x + y = 4$$

Appelons $S = x + y$ et $P = xy$ la somme et le produit des deux inconnues.

On sait que s'il existe des solutions, elle vérifient l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 4x + 20 = 0$$

$$\Delta = 16 - 80 = -64 < 0$$

Ce qui signifie qu'il n'existe pas de solution réelle pour x .

Par conséquent, il n'existe pas de rectangle d'aire 20 et de périmètre 8.