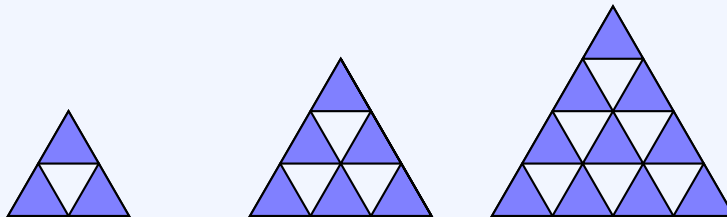


Suites et récurrence

Activité 1 : Introduction géométrique

On construit successivement des triangles équilatéraux, constitués eux mêmes de plus en plus de petits triangles équilatéraux, tous de la même taille, comme illustré sur la figure.

On note n le nombre de rangées de chaque triangle.



On a ainsi représenté les cas $n = 2$; $n = 3$ et $n = 4$.

Déterminer le nombre de petits triangles pour $n = 5$ puis pour $n = 100$.

Exprimer le nombre de petits triangles dans le cas général, pour un triangle à n rangées.

Activité 2 : Inspirée d'un sujet Bac

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

- 1) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
- 2) Comment calculer u_{50} sans calculer tous les termes précédents?
- 3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

Principe

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On souhaite démontrer la proposition suivante, notée \mathcal{P}_n :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- 1) Montrer que \mathcal{P}_0 est vraie.
- 2) Supposons qu'il existe un entier k tel que \mathcal{P}_k est vraie.
 - a) Écrire \mathcal{P}_{k+1} .
 - b) Montrer que \mathcal{P}_{k+1} est vraie.
- 3) Conclure.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition \mathcal{P}_n : « $10^n + 1$ est divisible par 9. »

- 1) Montrer que s'il existe un entier k tel que \mathcal{P}_k est vraie, alors \mathcal{P}_{k+1} est vraie.
- 2) Peut-on en conclure que \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n ? Justifier.
- 3) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $10^n - 1$ est un multiple de 9.
- 4) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que \mathcal{P}_n est fausse pour tout entier naturel n .

Exercice 3

Soit r un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Soit donc (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- 1) Montrer par récurrence que pour tout entier natu-

rel n , $u_n = u_0 + rn$.

2) **Application** : On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 8$

- Exprimer u_n en fonction de n
- Calculer u_{18} à l'aide de cette formule.

Exercice 4

Soit q un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Soit donc (u_n) une suite géométrique de raison q .

- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$.
- Application** : On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = -2$
 - Exprimer u_n en fonction de n
 - Calculer u_{12} à l'aide de cette formule.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 8$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 4 + 8 \times 3^n$.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

- Calculer u_2 et u_3
- Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
- Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 7

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$.

Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}.$$

Exercice 8

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , on a

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 9

Soit n un entier naturel non nul et

$$u_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1).$$

- Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
- Conjecturer une expression simple de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture par récurrence.

Suites majorées, minorées, bornées

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée.

- $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ pour $n \neq 0$
- $u_n = \cos(n) + \sin(n)$
- $u_n = -3 \cos(n) + 2 \sin(n)$
- $u_n = 2 \cos(n) - n$
- $u_n = \cos(n) + 3$
- $u_n = \frac{n}{n+1}$

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2}{10} u_n + 8$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 10$.

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , $3 \leq u_n \leq 5$

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier relatif n , $u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

Exercice 14

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0.3$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 4v_n - 4v_n^2$.

- Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on pose $f(x) = 4x - 4x^2$. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} . Donner une expression de $f'(x)$ pour tout réel $x \in [0; 1]$
- Étudier le signe de $f'(x)$

- 3) En déduire les variations de f et en déduire que pour tout réel x , $0 \leq f(x) \leq 1$.
- 4) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq 1$.

Suites croissantes, suites décroissantes

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 24n + 3$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} - u_n = 4n - 22$.
- 2) En déduire le sens de variations de la suite (u_n) .

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

- 1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 8$.
- 2) Montrer que pour entier naturel n ,
 $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 4$.
- 3) Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 17

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + u_n}$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
- 2) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 18

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 7$.
Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq -21$ et que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 19

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.
Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$ et que (u_n) est décroissante.

Exercice 20 : Bac 2021 – Métropole –

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}.$$

- 1) Montrer que la fonction f définie pour tout réel $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- 2) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

Exercice 21 : Bac 2022 – Centres étrangers

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = \frac{1}{10}$, $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur \mathbb{R} . Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1.$$

Exercice 22 : Bac 2022 – Métropole

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 23 : Bac 2021 – Métropole

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

- 1) Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
- 2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.
- 3) En déduire le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- 4) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.



Accès corrigé