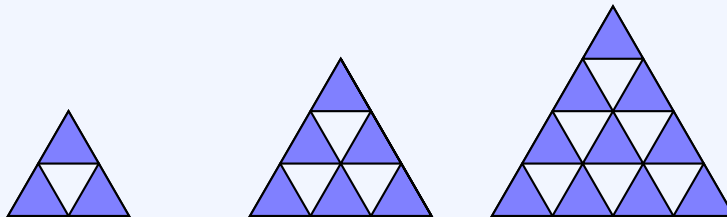


Suites et récurrence

Activité 1 : Introduction géométrique

On construit successivement des triangles équilatéraux, constitués eux mêmes de plus en plus de petits triangles équilatéraux, tous de la même taille, comme illustré sur la figure.

On note n le nombre de rangées de chaque triangle.



On a ainsi représenté les cas $n = 2$; $n = 3$ et $n = 4$.

Déterminer le nombre de petits triangles pour $n = 5$ puis pour $n = 100$.

Exprimer le nombre de petits triangles dans le cas général, pour un triangle à n rangées.

Activité 2 : Inspirée d'un sujet Bac

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

- 1) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
- 2) Comment calculer u_{50} sans calculer tous les termes précédents?
- 3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n .

Principe

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On souhaite démontrer la proposition suivante, notée \mathcal{P}_n :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- 1) Montrer que \mathcal{P}_0 est vraie.
- 2) Supposons qu'il existe un entier k tel que \mathcal{P}_k est vraie.
 - a) Écrire \mathcal{P}_{k+1} .
 - b) Montrer que \mathcal{P}_{k+1} est vraie.
- 3) Conclure.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition \mathcal{P}_n : « $10^n + 1$ est divisible par 9. »

- 1) Montrer que s'il existe un entier k tel que \mathcal{P}_k est vraie, alors \mathcal{P}_{k+1} est vraie.
- 2) Peut-on en conclure que \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n ? Justifier.
- 3) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $10^n - 1$ est un multiple de 9.
- 4) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que \mathcal{P}_n est fausse pour tout entier naturel n .

Exercice 3

Soit r un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Soit donc (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- 1) Montrer par récurrence que pour tout entier natu-

rel n , $u_n = u_0 + rn$.

2) **Application** : On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 8$

- Exprimer u_n en fonction de n
- Calculer u_{18} à l'aide de cette formule.

Exercice 4

Soit q un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$. Soit donc (u_n) une suite géométrique de raison q .

- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$.
- Application** : On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = -2$
 - Exprimer u_n en fonction de n
 - Calculer u_{12} à l'aide de cette formule.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 8$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 4 + 8 \times 3^n$.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

- Calculer u_2 et u_3
- Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
- Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 7

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$.

Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}.$$

Exercice 8

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , on a

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 9

Soit n un entier naturel non nul et

$$u_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1).$$

- Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
- Conjecturer une expression simple de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture par récurrence.

Suites majorées, minorées, bornées

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée.

- $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ pour $n \neq 0$
- $u_n = \cos(n) + \sin(n)$
- $u_n = -3 \cos(n) + 2 \sin(n)$
- $u_n = 2 \cos(n) - n$
- $u_n = \cos(n) + 3$
- $u_n = \frac{n}{n+1}$

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2}{10} u_n + 8$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 10$.

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$.

Montrer que, pour tout entier naturel n , $3 \leq u_n \leq 5$

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier relatif n , $u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

Exercice 14

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0.3$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 4v_n - 4v_n^2$.

- Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on pose $f(x) = 4x - 4x^2$. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} . Donner une expression de $f'(x)$ pour tout réel $x \in [0; 1]$
- Étudier le signe de $f'(x)$

- 3) En déduire les variations de f et en déduire que pour tout réel x , $0 \leq f(x) \leq 1$.
- 4) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq 1$.

Suites croissantes, suites décroissantes

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 24n + 3$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} - u_n = 4n - 22$.
- 2) En déduire le sens de variations de la suite (u_n) .

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$.

- 1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 8$.
- 2) Montrer que pour entier naturel n ,
 $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 4$.
- 3) Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 17

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + u_n}$.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
- 2) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 18

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 7$.
Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq -21$ et que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 19

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.
Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$ et que (u_n) est décroissante.

Exercice 20 : Bac 2021 – Métropole –

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour

tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}.$$

- 1) Montrer que la fonction f définie pour tout réel $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
- 2) Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

Exercice 21 : Bac 2022 – Centres étrangers

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = \frac{1}{10}$, $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur \mathbb{R} . Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1.$$

Exercice 22 : Bac 2022 – Métropole

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 23 : Bac 2021 – Métropole

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

- 1) Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
- 2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$
- 3) En déduire le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- 4) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1**Corrigé de l'exercice 2**

- 1) Montrer que s'il existe un entier k tel que \mathcal{P}_k est vraie, alors \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

Correction : Supposons que \mathcal{P}_k est vraie, c'est-à-dire que $10^k + 1$ est divisible par 9. Donc, il existe un entier m tel que :

$$10^k + 1 = 9m$$

Nous devons montrer que $10^{k+1} + 1$ est divisible par 9. Considérons $10^{k+1} + 1$:

$$10^{k+1} + 1 = 10 \cdot 10^k + 1 = 10(10^k + 1) - 9$$

D'après notre hypothèse de récurrence, $10^k + 1$ est divisible par 9, donc il existe un entier m tel que :

$$10(10^k + 1) - 9 = 10 \cdot 9m - 9 = 9(10m - 1)$$

Donc, $10^{k+1} + 1$ est divisible par 9. Ainsi, si \mathcal{P}_k est vraie, alors \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

- 2) Peut-on en conclure que \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n ? Justifier.

Correction : Non, on ne peut pas en conclure que \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n . En fait, on peut vérifier directement que \mathcal{P}_0 n'est pas vraie. Pour $n = 0$:

$$10^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

qui n'est pas divisible par 9. Ainsi, \mathcal{P}_n n'est pas vraie pour $n = 0$ et donc \mathcal{P}_n n'est pas vraie pour tout entier naturel n .

- 3) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $10^n - 1$ est un multiple de 9.

Correction : Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $10^n - 1$ est divisible par 9.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$10^1 - 1 = 9$$

qui est bien divisible par 9.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier k , $10^k - 1$ est divisible par 9, c'est-à-dire qu'il existe un entier m tel que :

$$10^k - 1 = 9m$$

Nous devons montrer que $10^{k+1} - 1$ est divisible par 9.

$$10^{k+1} - 1 = 10 \cdot 10^k - 1 = 10(10^k - 1) + 9$$

D'après notre hypothèse de récurrence, $10^k - 1$ est divisible

par 9, donc il existe un entier m tel que :

$$10(10^k - 1) + 9 = 10 \cdot 9m + 9 = 9(10m + 1)$$

Donc, $10^{k+1} - 1$ est divisible par 9. Ainsi, par le principe de récurrence, $10^n - 1$ est divisible par 9 pour tout entier naturel n .

- 4) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que \mathcal{P}_n est fautive pour tout entier naturel n .

Correction : Supposons par l'absurde que \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n . Cela signifie que $10^n + 1$ est divisible par 9 pour tout n . Si nous prenons $n = 0$, nous avons :

$$10^0 + 1 = 2$$

qui n'est pas divisible par 9. Cela contredit notre supposition que \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n . Par conséquent, \mathcal{P}_n est fautive pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 3

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = u_0 + rn$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $u_0 + r \times 0 = u_0$. $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = u_0 + rn$. Or, $u_{n+1} = u_n + r$. Ainsi, $u_{n+1} = u_0 + rn + r = u_0 + r(n + 1)$. $P(n + 1)$ est donc vraie.

- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

D'après la question 1, , pour tout entier naturel n , on a $u_n = 4 + 8n$. Ainsi, $u_{18} = 4 + 8 \times 18 = 144$.

Corrigé de l'exercice 4

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = u_0 \times q^n$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \times q^0 = u_0 \times 1 = u_0$. $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = u_0 \times q^n$. Or, $u_{n+1} = q u_n$. Ainsi, $u_{n+1} = q \times u_0 \times q^n = u_0 \times q^{n+1}$. $P(n + 1)$ est donc vraie.

- **Conclusion :** $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

D'après la question précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times (-2)^n$. Ainsi, $u_{12} = 3 \times (-2)^{12} = 12288$.

Corrigé de l'exercice 5

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $P(n)$: « $u_n = 4 + 8 \times 3^n$ ».

- **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a bien $4 + 8 \times 3^0 = 4 + 8 \times 1 = 12 = u_0$. $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = 4 + 8 \times 3^n$. Or, $u_{n+1} = 3u_n - 8$. Ainsi, $u_{n+1} = 3(4 + 8 \times 3^n) - 8 = 3 \times 4 + 3 \times 8 \times 3^n - 8 = 4 + 8 \times 3^{n+1}$. $P(n + 1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 6

On a

$$u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ »

- **Initialisation** : $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 = u_1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or, $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$. Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$\mathcal{P}(n + 1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et \mathcal{P} est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n

Corrigé de l'exercice 7

Pour tout entier naturel n , on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}$ ».

- **Initialisation** : $\frac{9 - 8 \times 0}{3 + 8 \times 0} = \frac{9}{3} = 3 = u_0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}$. On cherche à établir

$$u_{n+1} = \frac{9 - 8(n+1)}{3 + 8(n+1)} = \frac{9 - 8n - 8}{3 + 8n + 8} = \frac{1 - 8n}{11 + 8n}$$

Or, $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$. Ainsi, $u_{n+1} = \frac{\frac{9 - 8n}{3 + 8n} - 2}{2 \times \frac{9 - 8n}{3 + 8n} + 5} =$

$$\frac{\frac{9 - 8n - 2(3 + 8n)}{3 + 8n}}{\frac{2(9 - 8n) + 5(3 + 8n)}{3 + 8n}}$$

On a alors

$$u_{n+1} = \frac{9 - 8n - 2(3 + 8n)}{3 + 8n} \times \frac{3 + 8n}{2(9 - 8n) + 5(3 + 8n)} = \frac{9 - 8n - 2(3 + 8n)}{2(9 - 8n) + 5(3 + 8n)}$$

et donc

$$u_{n+1} = \frac{9 - 8n - 6 - 16n}{18 - 16n + 15 + 40n} = \frac{3 - 24n}{33 - 24n}$$

En factorisant par 3, on obtient finalement $u_{n+1} = \frac{3(1 - 8n)}{3(11 - 8n)} = \frac{1 - 8n}{11 + 8n}$ qui est bien le résultat voulu. $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, \mathcal{P} est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 8

Pour tout entier naturel non nul n , on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ »

- D'une part, la somme de tous les entiers entre 1 et 1 vaut évidemment 1. Par ailleurs, $\frac{1 \times (1 + 1)}{2} = 1$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a alors

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\mathcal{P}(n + 1)$ est donc vraie.

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie, \mathcal{P} est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n .

Corrigé de l'exercice 9

On a $u_1 = 1$, $u_2 = 1 + 3 = 4$, $u_3 = 1 + 3 + 5 = 9$, $u_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = n^2$ »

- **Initialisation** : $1^2 = 1 = u_1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $u_n = n^2$. Or,

$$u_{n+1} = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = u_n + (2n + 1)$$

Ainsi, puisque $u_n = n^2$ par hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

$\mathcal{P}(n + 1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : $\mathcal{P}(1)$ est vraie et \mathcal{P} est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel non nul n

Corrigé de l'exercice 10

a. Pour tout entier naturel n , $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$. Ainsi, $-1 \leq (-1)^n \leq 2$. La suite (u_n) est bornée.

b. Pour tout entier naturel n , $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(n) \leq 1$. Ainsi, $-2 \leq \cos(n) + \sin(n) \leq 2$. La suite (u_n) est bornée.

c. Pour tout entier naturel n , $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ et donc $3 \geq -3 \cos(n) \geq -3$, soit $-3 \leq -3 \cos(n) \leq 3$. Par ailleurs, $\frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{2}$ et donc $-2 \leq 2 \sin(n) \leq 2$. Ainsi, $1 \leq \frac{1}{2(n+1)} + 2 \sin(n) \leq 5$. La suite (u_n) est bornée.

d. Pour tout entier naturel n , $-2 \leq \cos(n) \leq 2$ et $-n \leq 0$. Ainsi, $2 \cos(n) - n \leq 2$. La suite (u_n) est majorée. En revanche, elle n'est pas minorée.

e. Pour tout entier naturel n , $-1 \leq \cos(n) \leq 1$. Ainsi, $2 \leq \cos(n) + 4 \leq 4$. La suite (u_n) est bornée.

f. Pour tout entier naturel n , $0 \leq n \leq n + 1$ et donc $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$. La suite (u_n) est bornée.

Corrigé de l'exercice 11

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $P(n)$: « $u_n \leq 10$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et donc $u_0 \leq 10$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 10$. Ainsi, $\frac{2}{10} \times 10 \leq \frac{2}{10} \times 10$ et $\frac{2}{10}u_n + 8 \leq \frac{2}{10} \times 10 + 8$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 10$. $P(n + 1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 12

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $P(n)$: « $3 \leq u_n \leq 5$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et donc $3 \leq u_0 \leq 5$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $3 \leq u_n \leq 5$.
Ainsi, $3 + 3 \leq u_n + 3 \leq 5 + 3$ et $\frac{3+3}{2} \leq \frac{u_n+3}{2} \leq \frac{5+3}{2}$, c'est-à-dire $3 \leq u_{n+1} \leq 4$.
Or, puisque $4 \leq 5$, on a donc bien $3 \leq u_{n+1} \leq 5$. $P(n + 1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 13

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $P(n)$: « $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ ».

- **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et donc $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
Ainsi, $\frac{1}{2} + 1 \leq u_n + 1 \leq 1 + 1$, c'est-à-dire $\frac{3}{2} \leq u_n + 1 \leq 2$.
On applique alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ à cette inégalité. Cette fonction étant décroissante sur $]0; +\infty[$, l'inégalité est alors renversée.
On a donc $\frac{2}{3} \geq \frac{1}{1+u_n} \geq \frac{1}{2}$.
Or, $\frac{2}{3} \leq 1$.
On a donc bien $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$. $P(n + 1)$ est donc vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie. P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 14

Pour tout réel x , $f'(x) = 4 - 8x$. On a $f'(x) > 0$ si et seulement si $4 - 8x > 0$ si et seulement si $x < \frac{1}{2}$. On construit donc le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f sur $[0; 1]$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
f	0	1	0

En particulier, on voit que pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq f(x) \leq 1$. Pour tout entier naturel n , on pose $P(n)$: « $0 \leq v_n \leq 1$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $v_0 = 0,3$ et donc $0 \leq v_n \leq 1$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leq v_n \leq 1$. En utilisant les résultats de la question précédente, on a alors $0 \leq f(v_n) \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq v_{n+1} \leq 1$. $P(n + 1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 15

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 24(n+1) + 3 = 2(n^2 + 2n + 1) - 24n - 24 + 3$$

et donc

$$u_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2 - 24n - 24 + 3 = 2n^2 - 20n - 19$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = 2n^2 - 20n - 19 - (2n^2 - 24n + 3) = 4n - 22$$

Etudions le signe de $u_{n+1} - u_n$, c'est-à-dire le signe de $4n - 22$. On a $4n - 22 \geq 0$ si et seulement si $n \geq 5,5$. Ainsi, (u_n) est décroissante jusqu'au rang 5 puis croissante à partir du rang 6. On a par ailleurs $u_5 = -67$ et $u_6 = -69$. Ainsi, (u_n) est en fait décroissante jusqu'au rang 6 puis croissante à partir de ce rang. Une autre méthode consiste simplement à étudier les variations de la fonction $x \mapsto 2x^2 - 24x + 3$.

Corrigé de l'exercice 16

Pour tout entier naturel n , on pose $P(n)$: « $u_n \leq 8$ »

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 5$ et donc $u_n \leq 8$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 8$.
On a donc $\frac{1}{2}u_n + 4 \leq \frac{1}{2} \times 8 + 4$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 8$. $P(n + 1)$ est vraie.

- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit n un entier naturel, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 4 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 4$.

Puisque pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq 8$, on a donc $-\frac{1}{2}u_n \geq -\frac{1}{2} \times 8$ et $-\frac{1}{2}u_n + 4 \geq -\frac{1}{2} \times 8 + 4$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

Corrigé de l'exercice 17

Pour tout entier naturel n , on pose $P(n)$: « $u_n > 0$ »

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et donc $u_0 > 0$. $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n > 0$. Or, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + u_n}$. u_{n+1} est donc le quotient de deux réels strictement positifs, il est donc strictement positif lui aussi. $P(n + 1)$ est vraie.
- Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$. On peut donc déterminer les variations de la suite (u_n) en étudiant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Or, pour tout entier naturel n ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2u_n}{2 + u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{2}{2 + u_n}$$

Or, puisque $u_n > 0$, il en vient que $2 + u_n > 2$ et donc que $\frac{2}{2 + u_n} < 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, et donc $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

Corrigé de l'exercice 18

On rappelle qu'une suite décroissante vérifie que pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1}$

Pour tout entier naturel n , on pose $P(n)$: « $u_n \geq u_{n+1} \geq -21$ »

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{2}{3} \times 2 - 7 = -\frac{17}{3}$. On a bien $u_0 \geq u_1 \geq -21$. $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geq u_{n+1} \geq -21$.
On a donc $\frac{2}{3}u_n - 7 \geq \frac{2}{3}u_{n+1} - 7 \geq -21 \times \frac{2}{3} - 7$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq -21$. $P(n + 1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 19

On rappelle qu'une suite décroissante vérifie que pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1}$

Pour tout entier naturel n , on pose $P(n)$: « $u_n \geq u_{n+1} \geq 1$ ».

- **Initialisation** : pour $n = 0$, on a $u_0 = 2 = 5$ et $u_1 = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$. On a bien $u_0 \geq u_1 \geq 1$. $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n \geq u_{n+1} \geq 1$.

On a donc $2u_n - 1 \geq 2u_{n+1} - 1 \geq 2 \times 1 - 1$. On applique alors la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ à l'inégalité. Cette fonction étant croissante sur \mathbb{R}_+ , le sens de l'inégalité ne change pas.

Ainsi, $\sqrt{2u_n - 1} \geq \sqrt{2u_{n+1} - 1} \geq \sqrt{2 \times 1 - 1}$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq -21$.
 $P(n + 1)$ est vraie.

- **Conclusion** : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 20

La fonction f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. De plus, pour tout réel positif x ,

$$f'(x) = \frac{5 \times (x + 2) - 1 \times (5x + 4)}{(x + 2)^2} = \frac{5x + 10 - 5x - 4}{(x + 2)^2} = \frac{6}{(x + 2)^2}$$

Ainsi, pour tout réel positif x , $f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ ».

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$ et donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$. La fonction f étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on peut l'appliquer à cette inégalité sans en changer le sens. Ainsi,

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$$

Or, $f(0) = 2$, qui est supérieur à 0, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = 4$. il en vient que

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$

$\mathcal{P}(n + 1)$ est donc vraie.

- **Conclusion** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie. \mathcal{P} est héréditaire. Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Corrigé de l'exercice 21

Pour tout entier naturel n , on pose $P(n)$: « $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$ »

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $a_0 = \frac{1}{10}$, $b_0 = 1$,
 $a_1 = e^{-b_0} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ et $b_1 = e^{-a_0} = e^{-0,1}$.
D'une part, puisque $10 \geq e$, en appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur \mathbb{R}_+^* , on a que $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{e}$, c'est-à-dire $a_0 \leq a_1$.
Par ailleurs, la fonction $x \mapsto e^x$ étant croissante sur \mathbb{R} . On a donc que $e^{-1} \leq e^{-0,1} \leq e^0$, c'est-à-dire $a_1 \leq b_1 \leq b_0$.
Finalement, on a bien que $0 < a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \leq 1$. $P(0)$ est donc vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant strictement décroissante sur \mathbb{R} , on a alors

$$e^0 > e^{-a_n} \geq e^{-a_{n+1}} \geq e^{-b_{n+1}} \geq e^{-b_n} \geq e^{-1}$$

Et donc, puisque $e^{-1} > 0$, on a, en lisant cette inégalité dans l'autre sens,

$$0 < a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} \leq 1$$

$P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 22

Puisque pour tout entier naturel non nul n , on a $\frac{1}{n} \leq 1$, alors, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq u_{n+1} \leq 1$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée. Elle est donc convergente.

Corrigé de l'exercice 23

$$1) \text{ On a } u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} + 0 + 1 = \frac{7}{4} \text{ et } u_2 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}.$$

- 2) Pour tout entier naturel n , on considère la proposition $P(n)$: « $n \leq u_n \leq n+1$ »

- Initialisation : On a $u_0 = 1$. On a bien $0 \leq u_0 \leq 0+1$. $P(0)$ est donc vraie.

- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie. On a donc $n \leq u_n \leq n+1$.

En multipliant par $\frac{3}{4}$, on obtient $\frac{3}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4}(n+1)$.

On ajoute alors $\frac{1}{4}n+1$ et on obtient $\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1 \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leq \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n + 1$,

c'est-à-dire, $n+1 \leq u_{n+1} \leq n + \frac{7}{4}$. Et puisque $\frac{7}{4} \leq 2$, on obtient bien $n+1 \leq u_{n+1} \leq n+2$. $P(n+1)$ est donc vraie.

- Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

- 3) Pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq n+1 \leq u_{n+1}$ et donc, en particulier, $u_n \leq u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante. Par ailleurs, pour tout entier naturel n , $n \leq u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

- 4) Pour tout entier naturel non nul n , on a $n \leq u_n \leq n+1$. On peut alors diviser cette inégalité par n , et on obtient $\frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$, c'est-à-dire $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. D'après le théorème d'encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$ existe et vaut 1.