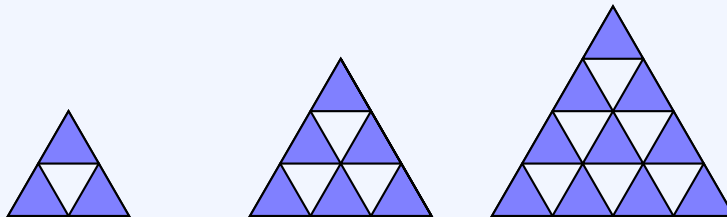


## Suites et récurrence

## Activité 1 : Introduction géométrique

On construit successivement des triangles équilatéraux, constitués eux mêmes de plus en plus de petits triangles équilatéraux, tous de la même taille, comme illustré sur la figure.

On note  $n$  le nombre de rangées de chaque triangle.



On a ainsi représenté les cas  $n = 2$ ;  $n = 3$  et  $n = 4$ .

Déterminer le nombre de petits triangles pour  $n = 5$  puis pour  $n = 100$ .

Exprimer le nombre de petits triangles dans le cas général, pour un triangle à  $n$  rangées.

## Activité 2 : Inspirée d'un sujet Bac

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

- 1) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
- 2) Comment calculer  $u_{50}$  sans calculer tous les termes précédents?
- 3) Conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  pour tout entier naturel  $n$ .

## Principe

## Exercice 1

Soit donc  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q$ .

- 1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = u_0 \times q^n$ .
- 2) **Application** : On considère la suite  $(u_n)$  géométrique de premier terme  $u_0 = 3$  et de raison  $r = -2$ 
  - a) Exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$
  - b) Calculer  $u_{12}$  à l'aide de cette formule.

## Exercice 2

On considère la suite  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 12$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = 3u_n - 8.$$

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = 4 + 8 \times 3^n.$$

## Exercice 3

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_1 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}.$$

- 1) Calculer  $u_2$  et  $u_3$
- 2) Conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) Démontrer cette conjecture par récurrence.

**Exercice 4**

On considère la suite  $u_n$  définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}$ .  
Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}.$$

**Exercice 5**

Soit  $n$  un entier naturel non nul et

$$u_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1).$$

- Calculer  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .
- Conjecturer une expression simple de  $u_n$  en fonction de  $n$  puis démontrer cette conjecture par récurrence.

**Exercice 6**

$(u_n)$  est la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$ .  
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $u_n = n(n + 1)$ .



Correction  
en vidéo

## Suites majorées, minorées, bornées

**Exercice 7**

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite  $(u_n)$  est majorée, minorée, bornée.

- $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  pour  $n \neq 0$
- $u_n = \cos(n) + \sin(n)$
- $u_n = -3 \cos(n) + 2 \sin(n)$
- $u_n = 2 \cos(n) - n$
- $u_n = \cos(n) + 3$
- $u_n = \frac{n}{n + 1}$

**Exercice 8**

On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 0.3$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = 4v_n - 4v_n^2$ .

- Pour tout réel  $x \in [0; 1]$ , on pose  $f(x) = 4x - 4x^2$ .  
On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
Donner une expression de  $f'(x)$  pour tout réel  $x \in [0; 1]$
- Étudier le signe de  $f'(x)$
- En déduire les variations de  $f$  et en déduire que pour tout réel  $x$ ,  $0 \leq f(x) \leq 1$ .

- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq v_n \leq 1$ .

**Exercice 9**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{2}{10} u_n + 8$ .  
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 10$ .

**Exercice 10**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 5$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$ .  
Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3 \leq u_n \leq 5$

**Exercice 11**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier relatif  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{1 + u_n}$ .  
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ .

## Suites croissantes, suites décroissantes

**Exercice 12**

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = 2n^2 - 24n + 3$ .

- Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  
 $u_{n+1} - u_n = 4n - 22$ .
- En déduire le sens de variations de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 13**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 5$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 4$ .

- Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq 8$ .
- Montrer que pour entier naturel  $n$ ,  
 $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2} u_n + 4$ .
- Déduire des deux questions précédentes que la suite  $(u_n)$  est croissante.

**Exercice 14**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2 + u_n}$ .

- Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .
- Montrer que la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.

**Exercice 15 : Bac 2021 – Métropole –**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}.$$

- 1) Montrer que la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x \in [0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .
- 2) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

**Exercice 16**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 7$ .  
Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq -21$  et que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

**Exercice 17**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 5$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$ .  
Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1$  et que  $(u_n)$  est décroissante.

**Exercice 18 : Bac 2022 – Centres étrangers**

On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par  $a_0 = \frac{1}{10}$ ,  $b_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\begin{cases} a_{n+1} = e^{-b_n} \\ b_{n+1} = e^{-a_n} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1.$$

**Pour réviser seul****Exercice 19**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_1 = 0,4$  et pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$u_{n+1} = 0,2u_n + 0,4.$$

Démontrer que  $(u_n)$  est croissante.



Correction

**Exercice 20**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}.$$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2. Conjecturer l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Démontrer cette conjecture.



Correction

**Exercice 21**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 5.$$

Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n > n^2$$



Correction

## (Correction)

**Corrigé de l'exercice 1**

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la proposition  $P(n)$  : «  $u_n = u_0 \times q^n$  ».

- **Initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a bien  $u_0 \times q^0 = u_0 \times 1 = u_0$ .  $P(0)$  est vraie.
- **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_n = u_0 \times q^n$ . Or,  $u_{n+1} = q u_n$ . Ainsi,  $u_{n+1} = q \times u_0 \times q^n = u_0 \times q^{n+1}$ .  $P(n+1)$  est donc vraie.
- **Conclusion** :  $P(0)$  est vraie.  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

D'après la question précédente, on a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 3 \times (-2)^n$ . Ainsi,  $u_{12} = 3 \times (-2)^{12} = 12288$ .

**Corrigé de l'exercice 2**

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la proposition  $P(n)$  : «  $u_n = 4 + 8 \times 3^n$  ».

- **Initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a bien  $4 + 8 \times 3^0 = 4 + 8 \times 1 = 12 = u_0$ .  $P(0)$  est vraie.
- **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_n = 4 + 8 \times 3^n$ . Or,  $u_{n+1} = 3u_n - 8$ . Ainsi,  $u_{n+1} = 3(4 + 8 \times 3^n) - 8 = 3 \times 4 + 3 \times 8 \times 3^n - 8 = 4 + 8 \times 3^{n+1}$ .  $P(n+1)$  est donc vraie.
- **Conclusion** :  $P(0)$  est vraie.  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**Corrigé de l'exercice 3**

On a

$$\begin{aligned} \bullet u_2 &= \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \bullet u_3 &= \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$  »

- **Initialisation** :  $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 = u_1$ ,  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. On a donc  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Or,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$ . Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$\mathcal{P}(n+1)$  est donc vraie.

- **Conclusion** :  $\mathcal{P}(1)$  est vraie et  $\mathcal{P}$  est héréditaire. Par récurrence,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel non nul  $n$ .

**Corrigé de l'exercice 4**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n = \frac{9-8n}{3+8n}$  ».

- **Initialisation** :  $\frac{9-8 \times 0}{3+8 \times 0} = \frac{9}{3} = 3 = u_0$ .  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_n = \frac{9-8n}{3+8n}$ . On cherche à établir

$$u_{n+1} = \frac{9-8(n+1)}{3+8(n+1)} = \frac{9-8n-8}{3+8n+8} = \frac{1-8n}{11+8n}$$

$$\text{Or, } u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}. \text{ Ainsi, } u_{n+1} = \frac{\frac{9-8n}{3+8n} - 2}{2 \times \frac{9-8n}{3+8n} + 5} = \frac{\frac{9-8n-2(3+8n)}{3+8n}}{\frac{2(9-8n)+5(3+8n)}{3+8n}}. \text{ On a alors}$$

$$u_{n+1} = \frac{9-8n-2(3+8n)}{3+8n} \times \frac{2(9-8n)+5(3+8n)}{3+8n} = \frac{9-8n-2(3+8n)}{2(9-8n)+5(3+8n)}$$

et donc

$$u_{n+1} = \frac{9-8n-6-16n}{18-16n+15+40n} = \frac{3-24n}{33-24n}$$

En factorisant par 3, on obtient finalement  $u_{n+1} = \frac{3(1-8n)}{3(11-8n)} = \frac{1-8n}{11-8n}$  qui est bien le résultat voulu.  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- **Conclusion** :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie,  $\mathcal{P}$  est héréditaire. Par récurrence,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**Corrigé de l'exercice 5**

On a  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 1 + 3 = 4$ ,  $u_3 = 1 + 3 + 5 = 9$ ,  $u_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose  $\mathcal{P}(n)$  : «  $u_n = n^2$  »

- **Initialisation** :  $1^2 = 1 = u_1$ ,  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- **Hérédité** : Soit  $n$  un entier naturel non nul. Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. On a donc  $u_n = n^2$ . Or,

$$u_{n+1} = 1+3+5+7+\dots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = u_n + (2n+1)$$

Ainsi, puisque  $u_n = n^2$  par hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} = u_n + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

- **Conclusion** :  $\mathcal{P}(1)$  est vraie et  $\mathcal{P}$  est héréditaire. Par récurrence,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel non nul  $n$ .

$n$

**Corrigé de l'exercice 6**

a. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$  et  $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ . Ainsi,  $-1 \leq (-1)^n \leq 2$ . La suite  $(u_n)$  est bornée.

b. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$  et  $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ . Ainsi,  $-2 \leq \cos(n) + \sin(n) \leq 2$ . La suite  $(u_n)$  est bornée.

c. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$  et donc  $3 \geq -3 \cos(n) \geq -3$ , soit  $-3 \leq -3 \cos(n) \leq 3$ . Par ailleurs,  $-1 \leq \sin(n) \leq 1$  et donc  $-2 \leq 2 \sin(n) \leq 2$ . Ainsi,  $-5 \leq -3 \cos(n) + 2 \sin(n) \leq 5$ . La suite  $(u_n)$  est bornée.

d. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $-2 \leq \cos(n) \leq 2$  et  $-n \leq 0$ . Ainsi,  $2 \cos(n) - n \leq 2$ . La suite  $(u_n)$  est majorée. En revanche, elle n'est pas minorée.

e. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ . Ainsi,  $2 \leq \cos(n) + 4 \leq 4$ . La suite  $(u_n)$  est bornée.

f. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq n \leq n + 1$  et donc  $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ . La suite  $(u_n)$  est bornée.

**Corrigé de l'exercice 7**

a. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$  et  $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ . Ainsi,  $-1 \leq (-1)^n \leq 2$ . La suite  $(u_n)$  est bornée.

b. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$  et  $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ . Ainsi,  $-2 \leq \cos(n) + \sin(n) \leq 2$ . La suite  $(u_n)$  est bornée.

c. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$  et donc  $3 \geq -3 \cos(n) \geq -3$ , soit  $-3 \leq -3 \cos(n) \leq 3$ . Par ailleurs,  $-1 \leq \sin(n) \leq 1$  et donc  $-2 \leq 2 \sin(n) \leq 2$ . Ainsi,  $-5 \leq -3 \cos(n) + 2 \sin(n) \leq 5$ . La suite  $(u_n)$  est bornée.

d. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $-2 \leq \cos(n) \leq 2$  et  $-n \leq 0$ . Ainsi,  $2 \cos(n) - n \leq 2$ . La suite  $(u_n)$  est majorée. En revanche, elle n'est pas minorée.

e. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ . Ainsi,  $2 \leq \cos(n) + 4 \leq 4$ . La suite  $(u_n)$  est bornée.

f. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq n \leq n + 1$  et donc  $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ . La suite  $(u_n)$  est bornée.

**Corrigé de l'exercice 8**

Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 4 - 8x$ . On a  $f'(x) > 0$  si et seulement si  $4 - 8x > 0$  si et seulement si  $x < \frac{1}{2}$ . On construit donc le tableau de signes de  $f'$  et le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 1]$ .

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$		+	-
$f$	0	1	0

En particulier, on voit que pour tout réel  $x \in [0; 1]$ , on a  $0 \leq f(x) \leq 1$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $P(n) : \ll 0 \leq v_n \leq 1 \gg$ .

• **Initialisation** : pour  $n = 0$ , on a  $v_0 = 0,3$  et donc  $0 \leq v_n \leq 1$ .  $P(0)$  est vraie.

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $0 \leq v_n \leq 1$ . En utilisant les résultats de la question précédente, on a alors  $0 \leq f(v_n) \leq 1$ , c'est-à-dire  $0 \leq v_{n+1} \leq 1$ .  $P(n + 1)$  est vraie.

• **Conclusion** :  $P(0)$  est vraie et  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé de l'exercice 9**

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la proposition  $P(n) : \ll u_n \leq 10 \gg$ .

• **Initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 2$  et donc  $u_0 \leq 10$ .  $P(0)$  est vraie.

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_n \leq 10$ . Ainsi,  $\frac{2}{10} \times 10 \leq \frac{2}{10} \times 10$  et  $\frac{2}{10} u_n + 8 \leq \frac{2}{10} \times 10 + 8$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \leq 10$ .  $P(n + 1)$  est donc vraie.

• **Conclusion** :  $P(0)$  est vraie.  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**Corrigé de l'exercice 10**

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la proposition  $P(n) : \ll 3 \leq u_n \leq 5 \gg$ .

• **Initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 5$  et donc  $3 \leq u_0 \leq 5$ .  $P(0)$  est vraie.

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $3 \leq u_n \leq 5$ .

Ainsi,  $3 + 3 \leq u_n + 3 \leq 5 + 3$  et  $\frac{3+3}{2} \leq \frac{u_n+3}{2} \leq \frac{5+3}{2}$ , c'est-à-dire  $3 \leq u_{n+1} \leq 4$ .

Or, puisque  $4 \leq 5$ , on a donc bien  $3 \leq u_{n+1} \leq 5$ .  $P(n + 1)$  est donc vraie.

• **Conclusion** :  $P(0)$  est vraie.  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**Corrigé de l'exercice 11**

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la proposition  $P(n) : \ll \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \gg$ .

• **Initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 1$  et donc  $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$ .  $P(0)$  est vraie.

• **Hérédité** :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ .

Ainsi,  $\frac{1}{2} + 1 \leq u_n + 1 \leq 1 + 1$ , c'est-à-dire  $\frac{3}{2} \leq u_n + 1 \leq 2$ .

On applique alors la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  à cette inégalité.

Cette fonction étant décroissante sur  $]0; +\infty[$ , l'inégalité est alors renversée.

On a donc  $\frac{2}{3} \geq \frac{1}{1+u_n} \geq \frac{1}{2}$ .

Or,  $\frac{2}{3} \leq 1$ .

On a donc bien  $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$ .  $P(n + 1)$  est donc vraie.

- **Conclusion** :  $P(0)$  est vraie.  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**Corrigé de l'exercice 12**

$$u_{n+1} = 2(n+1)^2 - 24(n+1) + 3 = 2(n^2 + 2n + 1) - 24n - 24 + 3$$

et donc

$$u_{n+1} = 2n^2 + 4n + 2 - 24n - 24 + 3 = 2n^2 - 20n - 19$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = 2n^2 - 20n - 19 - (2n^2 - 24n + 3) = 4n - 22$$

Étudions le signe de  $u_{n+1} - u_n$ , c'est-à-dire le signe de  $4n - 22$ . On a  $4n - 22 \geq 0$  si et seulement si  $n \geq 5,5$ . Ainsi,  $(u_n)$  est décroissante jusqu'au rang 5 puis croissante à partir du rang 6. On a par ailleurs  $u_5 = -67$  et  $u_6 = -69$ . Ainsi,  $(u_n)$  est en fait décroissante jusqu'au rang 6 puis croissante à partir de ce rang. Une autre méthode consiste simplement à étudier les variations de la fonction  $x \mapsto 2x^2 - 24x + 3$ .

**Corrigé de l'exercice 13**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $P(n)$  : «  $u_n \leq 8$  »

- **Initialisation** : pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 5$  et donc  $u_n \leq 8$ .  $P(0)$  est vraie.
- **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_n \leq 8$ .  
On a donc  $\frac{1}{2}u_n + 4 \leq \frac{1}{2} \times 8 + 4$  c'est-à-dire  $u_{n+1} \leq 8$ .  $P(n+1)$  est vraie.
- **Conclusion** :  $P(0)$  est vraie et  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Soit  $n$  un entier naturel, on a  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 4 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 4$ .

Puisque pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \leq 8$ , on a donc  $-\frac{1}{2}u_n \geq -\frac{1}{2} \times 8$  et  $-\frac{1}{2}u_n + 4 \geq -\frac{1}{2} \times 8 + 4$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ . La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

**Corrigé de l'exercice 14**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $P(n)$  : «  $u_n > 0$  »

- **Initialisation** : pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 1$  et donc  $u_0 > 0$ .  $P(0)$  est vraie.
- **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_n > 0$ . Or,  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+u_n}$ .  $u_{n+1}$  est donc le quotient de deux réels strictement positifs, il est donc strictement positif lui aussi.  $P(n+1)$  est vraie.
- **Conclusion** :  $P(0)$  est vraie et  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On a montré que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ . On peut donc déterminer les variations de la suite  $(u_n)$  en étudiant le

quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Or, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2u_n}{2+u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{2}{2+u_n}$$

Or, puisque  $u_n > 0$ , il en vient que  $2 + u_n > 2$  et donc que  $\frac{2}{2+u_n} < 1$ . Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ , et donc  $u_{n+1} < u_n$ . La suite  $(u_n)$  est strictement décroissante.

**Corrigé de l'exercice 15**

La fonction  $f$  est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur  $[0, +\infty[$ , le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. De plus, pour tout réel positif  $x$ ,

$$f'(x) = \frac{5 \times (x+2) - 1 \times (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

Ainsi, pour tout réel positif  $x$ ,  $f'(x) > 0$ .  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la proposition  $\mathcal{P}(n)$  : «  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$  ».

- **Initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 1$  et  $u_1 = \frac{5 \times 1 + 4}{1+2} = \frac{9}{3} = 3$  et donc  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$ .  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ . La fonction  $f$  étant strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ , on peut l'appliquer à cette inégalité sans en changer le sens. Ainsi,

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$$

Or,  $f(0) = 2$ , qui est supérieur à 0,  $f(u_n) = u_{n+1}$ ,  $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$  et  $f(4) = 4$ . il en vient que

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$

$\mathcal{P}(n+1)$  est donc vraie.

- **Conclusion** :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.  $\mathcal{P}$  est héréditaire. Par récurrence,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**Corrigé de l'exercice 16**

On rappelle qu'une suite décroissante vérifie que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $P(n)$  : «  $u_n \geq u_{n+1} \geq -21$  »

- **Initialisation** : pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 2$  et  $u_1 = \frac{2}{3} \times 2 - 7 = -\frac{17}{3}$ . On a bien  $u_0 \geq u_1 \geq -21$ .  $P(0)$  est vraie.
- **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_n \geq u_{n+1} \geq -21$ .  
On a donc  $\frac{2}{3}u_n - 7 \geq \frac{2}{3}u_{n+1} - 7 \geq -21 \times \frac{2}{3} - 7$  c'est-à-dire  $u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq -21$ .  $P(n+1)$  est vraie.
- **Conclusion** :  $P(0)$  est vraie et  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé de l'exercice 17**

On rappelle qu'une suite décroissante vérifie que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $P(n)$  : «  $u_n \geq u_{n+1} \geq 1$  ».

• **Initialisation** : pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 2 = 5$  et  $u_1 = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$ . On a bien  $u_0 \geq u_1 \geq 1$ .  $P(0)$  est vraie.

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_n \geq u_{n+1} \geq 1$ .

On a donc  $2u_n - 1 \geq 2u_{n+1} - 1 \geq 2 \times 1 - 1$ . On applique alors la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  à l'inégalité. Cette fonction étant croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , le sens de l'inégalité ne change pas.

Ainsi,  $\sqrt{2u_n - 1} \geq \sqrt{2u_{n+1} - 1} \geq \sqrt{2 \times 1 - 1}$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq -21$ .

$P(n+1)$  est vraie.

• **Conclusion** :  $P(0)$  est vraie et  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé de l'exercice 18**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $P(n)$  : «  $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$  »

• **Initialisation** : pour  $n = 0$ , on a  $a_0 = \frac{1}{10}$ ,  $b_0 = 1$ ,  $a_1 = e^{-b_0} = e^{-1} = \frac{1}{e}$  et  $b_1 = e^{-a_0} = e^{-0,1}$ .

D'une part, puisque  $10 \geq e$ , en appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a que  $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{e}$ , c'est-à-dire  $a_0 \leq a_1$ .

Par ailleurs, la fonction  $x \mapsto e^x$  étant croissante sur  $\mathbb{R}$ . On a donc que  $e^{-1} \leq e^{-0,1} \leq e^0$ , c'est-à-dire  $a_1 \leq b_1 \leq b_0$ .

Finalement, on a bien que  $0 < a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \leq 1$ .  $P(0)$  est donc vraie.

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$ . La fonction  $x \mapsto e^{-x}$  étant strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ , on a alors

$$e^0 > e^{-a_n} \geq e^{-a_{n+1}} \geq e^{-b_{n+1}} \geq e^{-b_n} \geq e^{-1}$$

Et donc, puisque  $e^{-1} > 0$ , on a, en lisant cette inégalité dans l'autre sens,

$$0 < a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} \leq 1$$

$P(n+1)$  est vraie.

• **Conclusion** :  $P(0)$  est vraie et  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé de l'exercice 19**

On rappelle qu'une suite décroissante vérifie que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $P(n)$  : «  $u_n \geq u_{n+1} \geq 1$  ».

• **Initialisation** : pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 2 = 5$  et  $u_1 = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$ . On a bien  $u_0 \geq u_1 \geq 1$ .  $P(0)$  est vraie.

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_n \geq u_{n+1} \geq 1$ .

On a donc  $2u_n - 1 \geq 2u_{n+1} - 1 \geq 2 \times 1 - 1$ . On applique alors la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  à l'inégalité. Cette fonction étant croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , le sens de l'inégalité ne change pas.

Ainsi,  $\sqrt{2u_n - 1} \geq \sqrt{2u_{n+1} - 1} \geq \sqrt{2 \times 1 - 1}$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq -21$ .

$P(n+1)$  est vraie.

• **Conclusion** :  $P(0)$  est vraie et  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corrigé de l'exercice 20**

La fonction  $f$  est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur  $[0, +\infty[$ , le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle. De plus, pour tout réel positif  $x$ ,

$$f'(x) = \frac{5 \times (x+2) - 1 \times (5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

Ainsi, pour tout réel positif  $x$ ,  $f'(x) > 0$ .  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$

Pour tout entier naturel  $n$ , on considère la proposition  $\mathcal{P}(n)$  : «  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$  ».

• **Initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a  $u_0 = 1$  et  $u_1 = \frac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$  et donc  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$ .  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

• **Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ . La fonction  $f$  étant strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ , on peut l'appliquer à cette inégalité sans en changer le sens. Ainsi,

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(4)$$

Or,  $f(0) = 2$ , qui est supérieur à 0,  $f(u_n) = u_{n+1}$ ,  $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$  et  $f(4) = 4$ . il en vient que

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$$

$\mathcal{P}(n+1)$  est donc vraie.

• **Conclusion** :  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.  $\mathcal{P}$  est héréditaire. Par récurrence,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

**Corrigé de l'exercice 21**

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $P(n)$  : «  $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$  »

• **Initialisation** : pour  $n = 0$ , on a  $a_0 = \frac{1}{10}$ ,  $b_0 = 1$ ,  $a_1 = e^{-b_0} = e^{-1} = \frac{1}{e}$  et  $b_1 = e^{-a_0} = e^{-0,1}$ .

D'une part, puisque  $10 \geq e$ , en appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a que  $\frac{1}{10} \leq \frac{1}{e}$ , c'est-à-dire  $a_0 \leq a_1$ .

Par ailleurs, la fonction  $x \mapsto e^x$  étant croissante sur  $\mathbb{R}$ . On a donc que  $e^{-1} \leq e^{-0,1} \leq e^0$ , c'est-à-dire  $a_1 \leq b_1 \leq b_0$ .

Finalement, on a bien que  $0 < a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0 \leq 1$ .  $P(0)$  est donc vraie.

- Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $P(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1$ . La fonction  $x \mapsto e^{-x}$  étant strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ , on a alors

$$e^0 > e^{-a_n} \geq e^{-a_{n+1}} \geq e^{-b_{n+1}} \geq e^{-b_n} \geq e^{-1}$$

Et donc, puisque  $e^{-1} > 0$ , on a, en lisant cette inégalité

dans l'autre sens,

$$0 < a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1} \leq 1$$

$P(n+1)$  est vraie.

- Conclusion :  $P(0)$  est vraie et  $P$  est héréditaire. Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .