

Plan de Travail

Activité A p 176 □

1 Généralités sur les matrices

1.1 Vocabulaire et notations :

Définition 1 : Matrice

Soient n et p deux entiers naturels non nuls.

Une **matrice** A de dimension (ou de taille) $n \times p$ est un tableau de nombres à n lignes et à p colonnes. Ces nombres sont appelés les **coefficients** de la matrice A .

Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, le coefficient de la matrice A situé à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne est noté a_{ij} et appelé coefficient d'indice $(i; j)$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2×3 .

a_{23} est le coefficient de la matrice situé à la ligne 2 et à la colonne 3, $a_{23} = 6$.

On a alors :

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{13} = 3$$

$$a_{21} = 4, \quad a_{22} = 5, \quad a_{23} = 6$$

Définition 2 : Vocabulaire :

- Une matrice ayant le même nombre n de lignes que de colonnes est appelée **matrice carrée d'ordre n** .
- Une matrice n'ayant qu'une colonne est appelée **matrice colonne**.
- Une matrice n'ayant qu'une seule ligne est appelée **matrice ligne**.
- Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement lorsque $i = j$.
- La **matrice identité** d'ordre n est la matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. On la note I_n ou seulement I .

Exemple

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont des matrices colonnes.

La matrice $C = (2 \quad -1)$ est une matrice ligne.

$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

Les matrices $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales d'ordre respectivement 3 et 2.

La matrice identité d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice identité d'ordre 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 1 : Égalité de deux matrices

Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont la même dimension et si les coefficients qui occupent la même position sont deux à deux égaux.

Méthode 1 : Égalité de deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a+3 \\ 4 & b-2 \end{pmatrix}$$

Déterminer, si possible, les réels a et b tels que $A = B$.



Correction

1.2 Somme et produit par un réel

Définition 3

Soient A et B deux matrices de même dimension.

- La somme des matrices A et B est la matrice, notée $A + B$, obtenue en additionnant deux à deux les coefficients de A et B qui occupent la même position.
- Le produit de la matrice A par un réel k est la matrice, notée kA , obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k .

La proposition suivante découle immédiatement des propriétés de l'addition et de la multiplication par un réel dans \mathbb{R} :

Propriété 2

Soient A , B et C trois matrices de mêmes dimensions, k et k' deux réels.

- | | |
|-------------------------------|---|
| i) $A + B = B + A$. | ii) $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$. |
| iii) $(k + k')A = kA + k'A$. | iv) $k(A + B) = kA + kB$. |

Définition 4

On appelle **opposée** de A , la matrice $(-1)A$, notée plus simplement $-A$. De plus, $A - B = A + (-B)$.

Méthode 2 : Somme et produit d'un réel sur une matrice

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices $C = 3A$, $D = A + B$ et $E = 2A - 3B$.



Correction

Plan de Travail

21 p 190 □



QCM n°1

1.3 Produit matriciel**Définition 5**

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de dimension $n \times p$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de dimension $p \times q$.

Le **produit de la matrice A par la matrice B** est la matrice, notée $A \times B$, de dimensions $n \times q$ dont le coefficient c_{ij} (avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq q$) est le produit de la ligne i de la matrice A par la colonne j de la matrice B :

$$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{ip} \times b_{pj}$$

Remarque 1 : Compatibilité

e produit de deux matrices n'est pas défini s'il n'y a pas, comme on dit, *compatibilité des dimensions* :

$$\boxed{\text{Matrice de taille } n \times p \quad \times \quad \text{Matrice de taille } p \times q \quad = \quad \text{Matrice de taille } n \times q}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Soit A une matrice de dimension 3×2 et B une matrice de dimension 2×3 .

$A \times B$ est une matrice de dimension 3×3 .

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 \times 5 + 1 \times 2 & 3 \times 2 + 1 \times 6 & 3 \times (-1) + 1 \times (-3) \\ 4 \times 5 + (-1) \times 2 & 4 \times 2 + (-1) \times 6 & 4 \times (-1) + (-1) \times (-3) \\ 7 \times 5 + 8 \times 2 & 7 \times 2 + 8 \times 6 & 7 \times (-1) + 8 \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 12 & -6 \\ 18 & 2 & -1 \\ 51 & 62 & -31 \end{pmatrix}$$

Remarque 2 : Commutativité

La multiplication de matrices **n'est pas commutative** : $A \times B \neq B \times A$.

Exemple

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

B est une matrice de dimension 2×3 et A une matrice de dimension 3×2 .

$A \times B$ est une matrice de dimension 3×3 (alors que $B \times A$ est une matrice de dimension 2×2).

Ici, $A \times B$ et $B \times A$ n'ont pas les mêmes dimensions. Elles ne peuvent être égales.

On veut vérifier que

$$B \times A = \begin{pmatrix} 5 \times 3 + 2 \times 4 + (-1) \times 7 & 5 \times 1 + 2 \times (-1) + (-1) \times 8 \\ 2 \times 3 + 6 \times 4 + (-3) \times 7 & 2 \times 1 + 6 \times (-1) + (-3) \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ 9 & -28 \end{pmatrix}$$

qui est différente de $A \times B$ calculée dans l'exemple précédent.

Méthode 3 : Effectuer un produit matriciel

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Peut-on effectuer les produits $A \times E$, $E \times A$ et $D \times E$?
- Calculer les produits $A \times C$, $D \times B$, $B \times E$, $D \times E$, $A \times B$ et $B \times A$.



Correction

Propriété 3

Soient k un réel, A , B et C trois matrices dont les dimensions permettent les calculs suivants :

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = A \times B \times C$
- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- $(kA) \times B = k(A \times B) = kAB$
- $A \times I_n = I_n \times A = A$

Méthode 4 : Utiliser les propriétés multiplicatives des matriciel

$$\text{Soient les matrices } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer ABC de deux manières.



Correction

Plan de Travail

22 p 190 23 p 190 45 p 190



QCM n°2

1.4 Puissance n -ème d'une matrice carrée

Définition 6

Soit A une matrice carrée d'ordre supérieur ou égal à 2 et n un entier naturel non nul.
La **puissance n -ième** de A est la matrice, notée A^n , définie par $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}}$.

Propriété 4

Soit A une matrice carrée d'ordre supérieur ou égal à 2.
Pour tout entier naturel n non nul, $A^{n+1} = A^n \times A = A \times A^n$ et $A^1 = A$.

Méthode 5 : Calculer des puissances de matrices.

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 .

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

Démontrer que $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n non nul.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 , puis A^3 .

Que vaut A^n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3?



Correction

Plan de Travail

24 p 190 25 p 190 47 p 193



QCM n°3

2 Matrice inverse et système linéaire

2.1 Matrice inverse d'une matrice carrée

Propriété 5

Soit A une matrice carrée d'ordre n (avec n un entier naturel non nul).

- Dire que A est **inversible** signifie qu'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A \times B = I_n$ et $B \times A = I_n$.
- Lorsqu'elle existe, la matrice B est unique, on l'appelle la **matrice inverse** de A et on la note A^{-1} .

Méthode 6 : Calculer des puissances de matrices.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$.
Calculer $A \times B$ et $B \times A$. Que peut-on en déduire ?



Correction

Attention : Il existe des matrices non inversibles !

Par exemple, la matrice nulle 0_n d'ordre n n'est pas inversible car pour toute matrice carrée A d'ordre n , $A \times 0_n = 0_n \neq I_n$.

Propriété 6

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n (avec n dans \mathbb{N}^*) telles que $A \times B = I_n$.
Alors $B \times A = I_n$ et les matrices A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Remarque

En principe, montrer que A est inversible revient à montrer l'existence d'une matrice B telle que $AB = I_n$ **et** $BA = I_n$.
Ce théorème montre que l'une ou l'autre des assertions suffit en réalité, ce qui est bien pratique.

Méthode 7 : Calculer des puissances de matrices.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -3 \\ -6 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Démontrer que A est inversible et que $A^{-1} = B$.



Correction

Définition 7 : Déterminant d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

On appelle **déterminant** de A et on note $\det(A)$, le nombre $\det(A) = ad - bc$.

Propriété 7 : Formule d'inversion d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2, non nulle.

- A est inversible si, et seulement si, son **déterminant** est non nul.
- Dans ce cas, la matrice inverse de A est $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Remarque

Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice d'ordre 2 soit inversible, et donne en plus une formule donnant l'inverse.

Méthode 8 : Calculer des puissances de matrices.

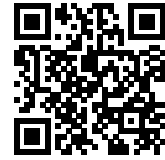
Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible puis donner A^{-1}



Correction

Plan de Travail

26 p 190 □ 27 p 190 □ 46 p 192 □ 48 p 193 □



QCM n°4

2.2 Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires

Définition 8

Soient a, b, c, d, e et f six nombres réels.

Le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ d'inconnues réelles x et y est équivalent à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

ou encore à $A \times X = B$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

A est appelée la **matrice du système linéaire** et l'écriture $AX = B$ est appelée **écriture matricielle du système**.

Exemple

Le système $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ s'écrit $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Propriété 8

On considère un système linéaire de n équations à n inconnues d'écriture matricielle $AX = B$, où A est une matrice carrée d'ordre n et B une matrice colonne à n lignes.

Si A est **inversible** alors ce système admet une **unique solution** : $X = A^{-1}B$.

Méthode 9 : Calculer des puissances de matrices.

On considère le système (S) : $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$.

- Donner l'écriture matricielle de ce système.
- En déduire les solutions du système (S).

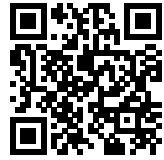


Correction

Plan de Travail

28 p 190 29 p 190 49 p 193 50 p 193

Synthèse : 43 p 192 44 p 192 52 p 193



QCM n°5