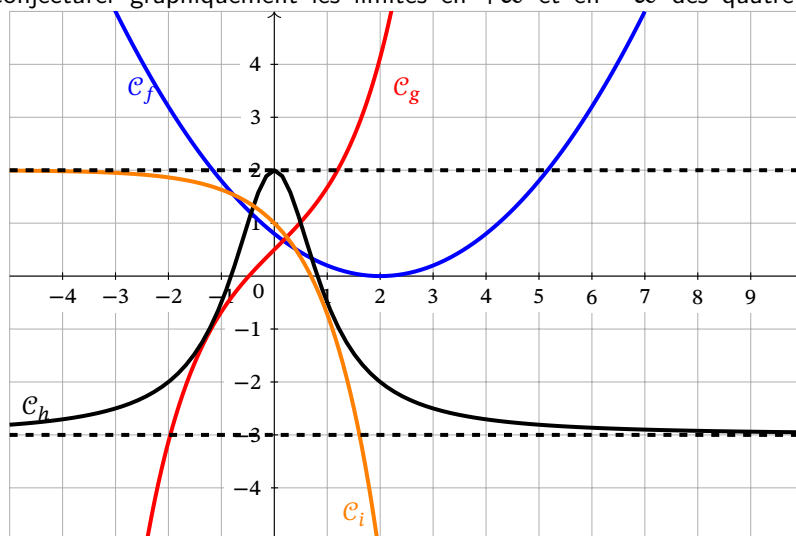


Limites de fonctions

1 Limites finies à l'infini

Activité 1 : Conjecturer des limites finies en $+\infty$

Conjecturer graphiquement les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des quatre fonctions représentées ci-dessous.



Correction

Activité 2 : Animation Géogébra

Déplacez les curseurs rouge des activités Géogébra.

Essayez de compléter la phrase :

"Dire qu'une fonction admet une limite l quand x tend vers $+\infty$ signifie ..."



Activité Géogébra 1



Activité Géogébra 2

1.1 Définition et première propriété :

Définition 1 : Notion de limite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $l \in \mathbb{R}$.

On dit que la fonction f admet pour limite l lorsque x tend vers $+\infty$

si $f(x)$ prend des valeurs aussi proches de l que l'on souhaite pourvu qu'on prenne des x assez grand.

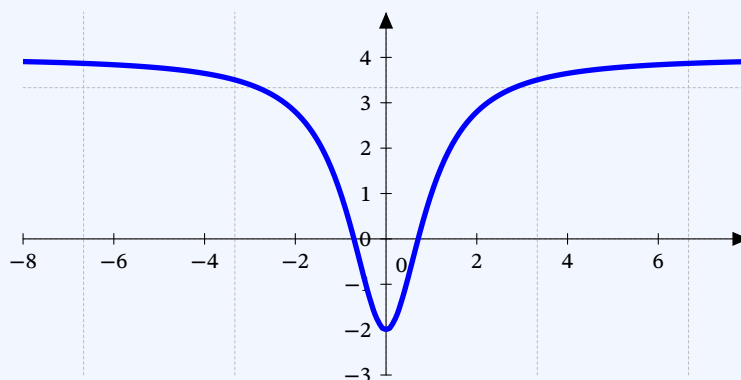
On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$.

Remarque 1

On peut avoir le même phénomène quand x tend vers $-\infty$ et avoir $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

Exemple 1



On conjecture ici que la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction représentée est 4.

$$\text{On note } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$$

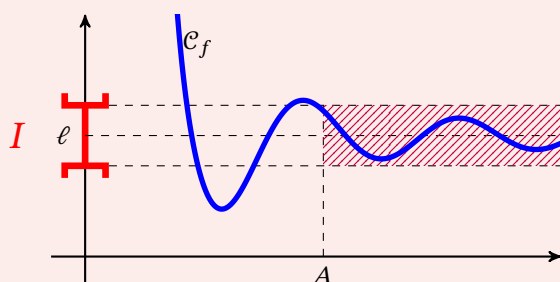
Définition 2 : Définition mathématique

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$. Soit l un réel.

f admet pour limite l en $+\infty$ si :

Pour tout intervalle ouvert I tel que $l \in I$, il existe un réel A tel que pour tous les réels $x > A$, $f(x) \in I$

Illustration



Quelle que soit l'intervalle ouvert I sur l'axe des ordonnées, on trouvera toujours réel A , tel qu'après cette valeur, toutes les images soient dans l'intervalle.

Définition 3 : Pour les matheux !!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A, |f(x) - l| < \epsilon$$

Propriété 1 : Limites finies de fonctions de références :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Plan de Travail

39 p 178 □



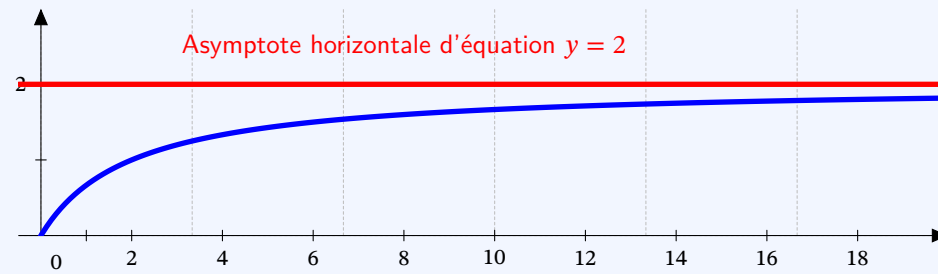
QCM n°1

1.2 Asymptote horizontale

Définition 4 : Asymptote horizontale

Soit $l \in \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère. On dit que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe $\mathcal{C}$: en $+\infty$, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et en $-\infty$, si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

Exemple 2



Dans cette situation, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, la courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.



Animation Géogébra

Plan de Travail

19 p 176 ☐ 20 p 176 ☐

QCM n°2

2 Limites infinies à l'infini

Définition 5 : Limite en $+\infty$

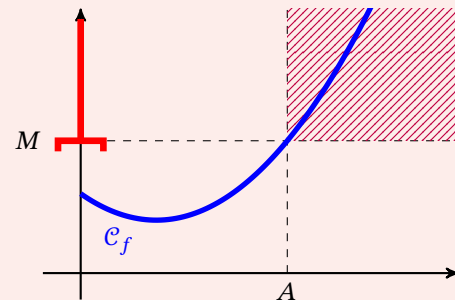
f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si pour tout intervalle ouvert $]M; +\infty[$ où M est un réel, il existe un réel A tel que pour tous les réels x supérieurs à A , $f(x) \in]M; +\infty[$.

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On dit aussi que :

$f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Illustration



Quel que soit le nombre M , on trouvera toujours un réel A , à partir duquel toutes les images seront strictement supérieures à M .

Définition 6 : Pour les mathéux !!

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\iff$$

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A, f(x) > M$$

Méthode 1 : Déterminer la limite d'une fonction en $+\infty$

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (x-1)^2 + 1$.

- 1) Est-il vrai qu'il existe un réel x_0 tel que, pour tout $x > x_0$, $f(x) > 100$?
- 2) Démontrer que, pour tout réel $A \geq 1$, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
- 3) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?



Correction

Plan de Travail

38 p 178 ☐

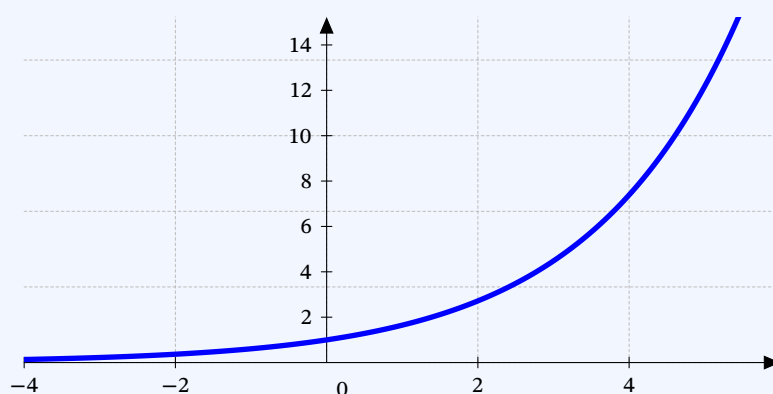
QCM n°3

Définition 7 : Limite en $-\infty$

f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si pour tout intervalle $] -\infty; M[$ où M est un réel, il existe un réel A tel que pour tous les réels x inférieurs à A , $f(x) \in] -\infty; M[$.
On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
On dit aussi que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Remarque 2 : idem en $-\infty$

On définit de la même manière $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
Il s'agit de la principale différence avec les suites : pour les suites, l'indice n ne pouvait que tendre vers $+\infty$. Dans le cas des fonctions, le réel x peut aller vers $+\infty$ mais aussi $-\infty$ et d'autres valeurs réelles entre les deux, comme nous le verrons plus tard dans ce chapitre...

Exemple 3

On a représenté la fonction exponentielle. On a clairement : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Remarque 3 : Limites et monotonie ne sont, en général, pas liées.

On peut montrer que pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x + \cos(x)$ on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ mais que cette fonction n'est pourtant pas croissante.
On retient donc qu'une fonction peut tendre vers $+\infty$ sans être forcément croissante.

Propriété 2 : Limites remarquables en $\pm\infty$

Soit n un entier naturel non nul.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Si n est pair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$

Si n est impair, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

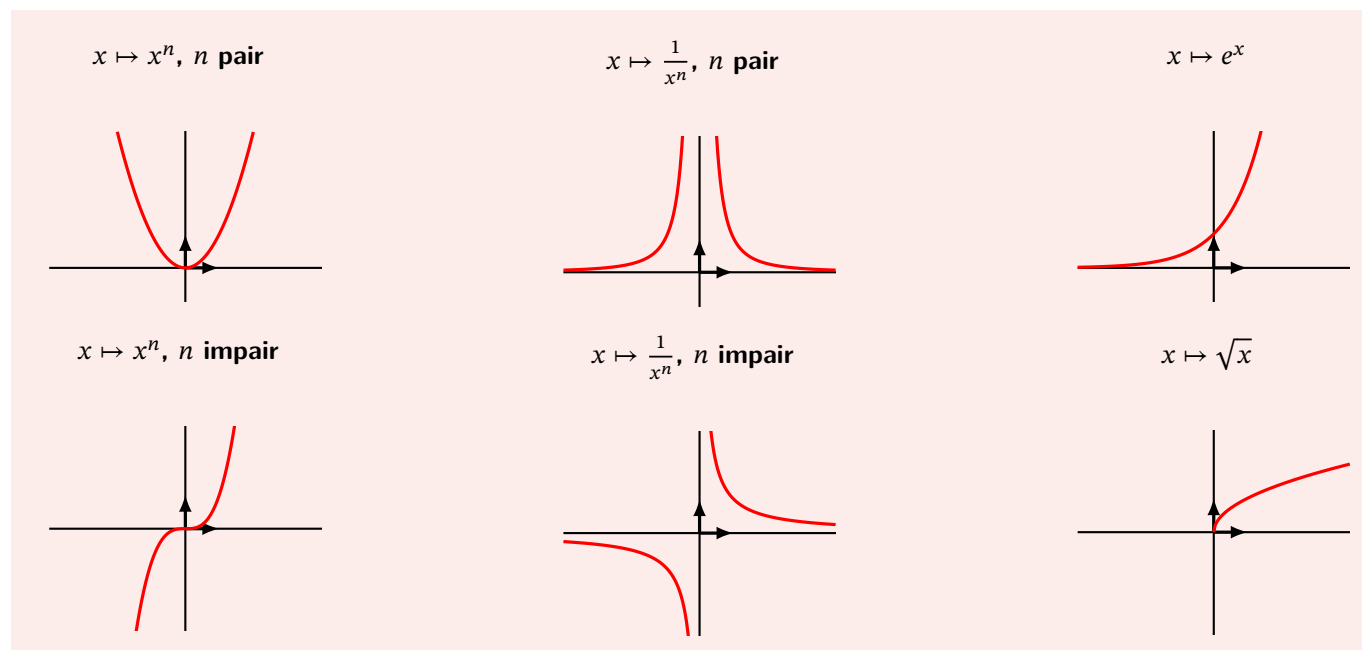
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Illustration

Il est important de visualiser les courbes représentatives de ces fonctions.
Celles-ci vous permettront de bien garder ces limites usuelles en tête.



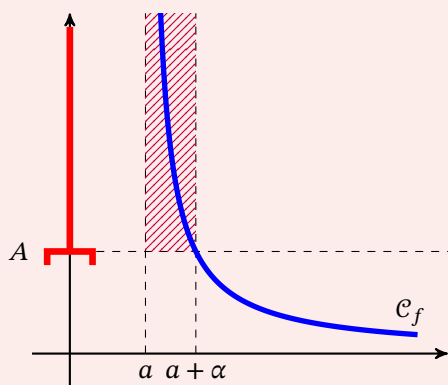
3 Limites en un réel

Définition 8 : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

Une fonction f a pour limite $+\infty$ en a , si tout intervalle $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a . On note alors :

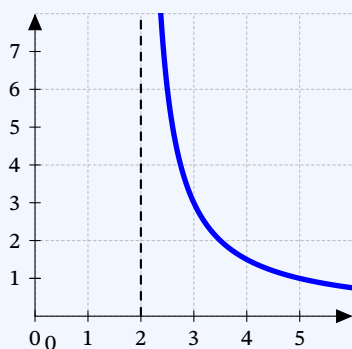
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{et de façon analogue} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Illustration



Cette définition traduit l'idée que les valeurs $f(x)$ finissent, pour des valeurs de x de plus en plus proches de a , à dépasser n'importe quel réel A , aussi grand soit-il : quel que soit le nombre réel A (aussi « grand » soit-il), il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a; a + \alpha[$, $f(x) \in]A; +\infty[$.

Exemple



Dans cette situation, la fonction étudiée est définie sur $]2; +\infty[$. La fonction tend vers l'infini quand les antécédents se rapprochent de 2. On note : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$

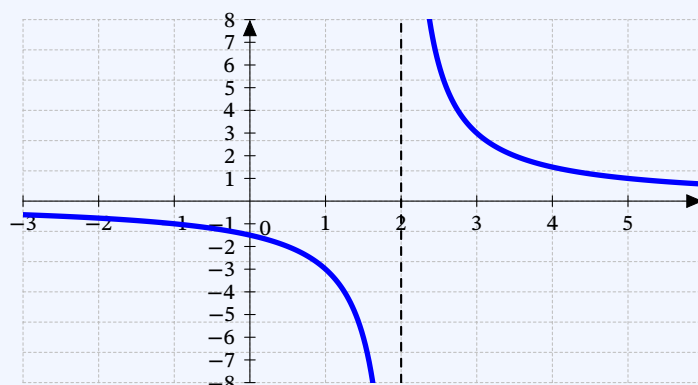
Méthode 2 : Déterminer une limite en un réel.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

- Soit A un réel strictement positif. Démontrer que l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de 0.
- En déduire la limite de f en 0.



Correction

Exemple 4 : Limite à gauche et limite à droite

Dans cette situation, la fonction étudiée n'est pas définie en 2 et les limites "à gauche" et "à droite" sont différentes.

Il est impossible de définir $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
Il faut distinguer la limite quand $x \rightarrow -2$ par valeur inférieure, et la limite quand $x \rightarrow -2$ par valeur supérieure.

Méthode 3 : Déterminer une limite en un réel.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

- Soit A un réel strictement positif. Démontrer que l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de 0.
- En déduire la limite de f en 0.



Correction

Notations : Limite à gauche et limite à droite

Dans la situation de l'exemple, on note :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$ quand $x \rightarrow 2$ par valeur supérieure et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x)$ quand $x \rightarrow 2$ par valeur inférieure.

On a donc :

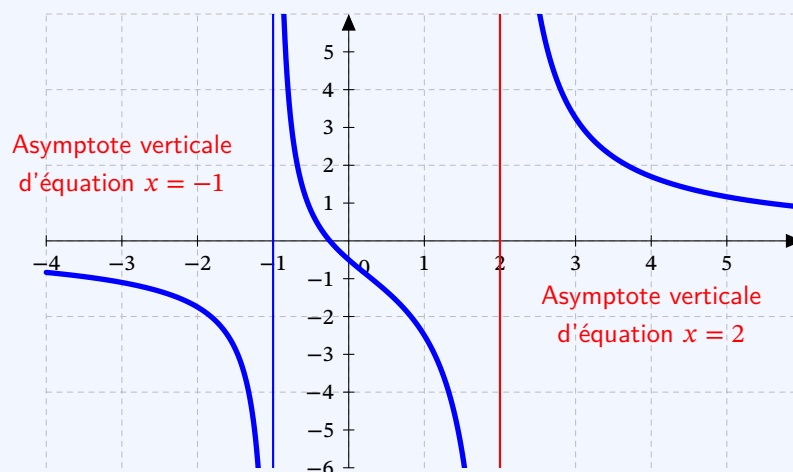
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$$

3.1 Asymptote verticale :**Définition**

Soit a un réel, $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.

On dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}$ si la limite à droite ou la limite à gauche de f en a est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple



Dans cette situation, la fonction représentée admet deux asymptotes verticales, d'équation $x = -1$ et $x = 2$

Méthode 4 : Déterminer des équations d'asymptotes

f est une fonction telle que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$

Déterminer ses éventuelles asymptotes, en donner leur équation.



Correction

Méthode 5

On considère une fonction f dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$	2



Correction

- Quel est l'ensemble de définition de f ?
- Quelles sont les limites données dans ce tableau ? Interpréter graphiquement ces résultats.
- Proposer une courbe pouvant représenter la fonction f .

Plan de Travail

Asymptotes : 17 p 176 ☐ 18 p 176 ☐ 21 p 176 ☐

Limites : 44 p 176 ☐ 46 (1-2-3) p 179 ☐ 48*** p 179 ☐



QCM n°4

4 Opérations sur les limites

Propriété 3 : Comme pour les suites.

Les résultats concernant les opérations sur les limites de suite (somme, produit quotient) sont applicables aux limites de fonctions lorsque x tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou un réel a .

On rappelle qu'il y a quatre formes indéterminées qui sont « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ».

Méthode 6 : Limite en une valeur d'une fonction continue

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3$$

[Correction](#)

Méthode 7 : Limite d'un polynôme en l'infini

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 4x^2 + 6x + 2$$

[Correction](#)

Méthode 8 : Limite d'un polynôme en l'infini

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 4x^2 + 6x + 2$$

[Correction](#)

Méthode 9 : Somme de limites

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x}$

[Correction](#)

Méthode 10 : Limite d'un quotient

Déterminer la limite en 2, à gauche et à droite, de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
par : $f(x) = \frac{2x+1}{3x-6}$

[Correction](#)

Méthode 11 : Limites aux bornes du domaine

Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x-7}{1-x^2}$



Correction

Propriété 4 : Fonction polynôme

Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, un polynôme admet la même limite que son terme de plus haut degré.

Plan de Travail

Calculs de limites : 24 p 177 ☐ 25 p 177 ☐ 27 p 177 ☐
52 p 180 ☐ 55 p 180 ☐



QCM n°5

5 Composition**Propriété 5** : Composition de fonctions

a, b et c désignent soit des réels, soit $+\infty$, soit $-\infty$. Soient f et g deux fonctions.

$$\text{Si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{cases} \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

Méthode 12 : Utiliser la composition de fonctions pour déterminer une limite

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5-4x}$



Correction

6 Comparaison et limites**Propriété** : Théorème de comparaison :

Si f et g sont deux fonctions telles que : Pour x assez grand, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Remarque : La même chose en $-\infty$

Si pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Méthode 13 : Limite d'un quotient en une valeur

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 3 \cos x$



Correction

Propriété : Théorème des gendarmes :

Si f, g et h sont des fonctions et l un nombre réel tel que :

- Pour x assez grand, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Méthode 14 : Attention aux gendarmes

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



Correction

Plan de Travail

Théorèmes de comparaisons : 32 p 177 ☐ 77 p 183 ☐



QCM n°6

7 Cas de la fonction exponentielle**Propriété**

Limites finies de fonctions de références : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Méthode 15 : On se fait une expo ?

Calculer a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-3)(e^x-1)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x-1}{e^x+1}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2-3x}$



Correction

Propriété

Propriété des croissances comparées : • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Remarque

Pour tout entier naturel k non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k e^x = 0$

Méthode 16 : C'est qui le plus costaud ??

On retient que la fonction exponentielle croît en $+\infty$ bien plus vite que toute fonction puissance.

Calculer a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 5x^2$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 1)e^x$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{e^x}$



Correction

Plan de Travail

Exponentielle : 31 p 177 ☐ 33 p 177 ☐ 86 p 177 ☐

Synthèse : 87 p 184 ☐ 88 p 184 ☐ 89 p 184 ☐ 90 p 184 ☐
91 p 184 ☐

Prépa Bac : 106 p 189 ☐ 107 p 189 ☐



QCM n°7