Cours & méthodes

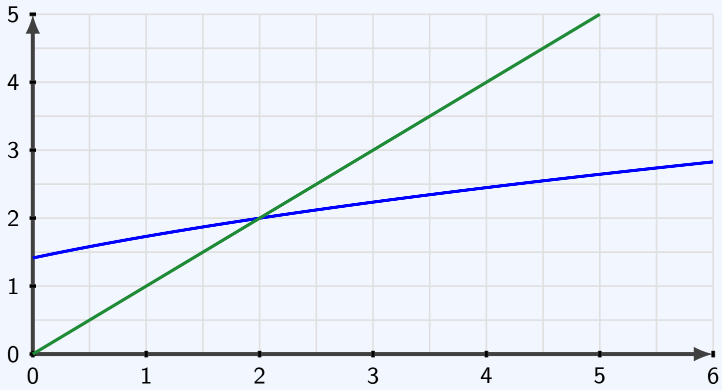
# Limites de suites

2 ANALYSE

## 1 Approches de la notion de limite d'une suite :

**Activité** 1 : Représentation graphique d'une suite définie par une fonction

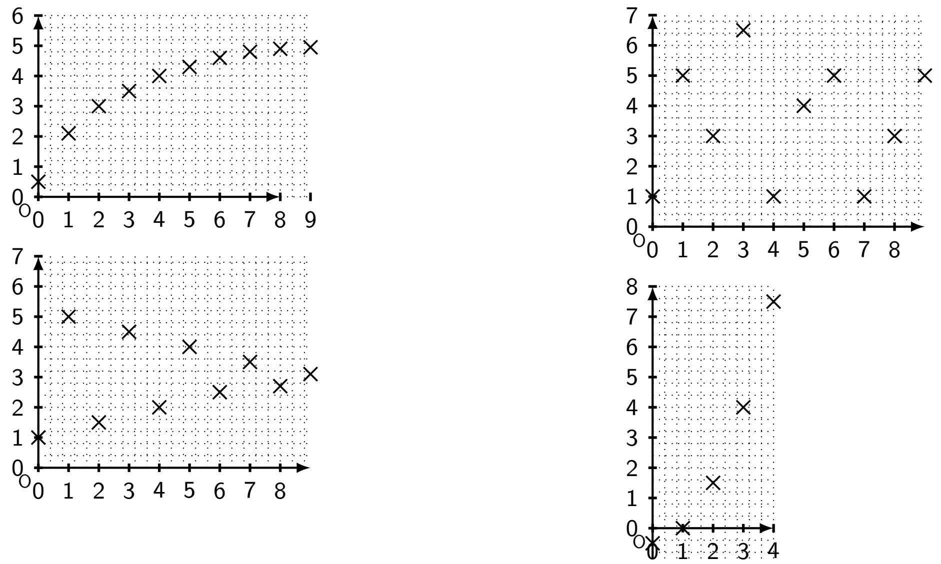
On a représenté ci-dessous, la fonction $f$ définie sur $[0;9]$ par $f(x)=\sqrt{x+2}$ et la droite d'équation $y=x$.
En déduire la représentation graphique des premiers termes de la suite $u$ définie pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$ dans ces deux cas distincts :
1) $u_0=1$ 2) $u_0=5$
Que peut-on en déduire sur le comportement de la suite pour de grandes valeurs de $n$ ?




Correction

**Activité** 2 : Conjecturer graphiquement des limites de suites

A partir des représentations graphiques, conjecturer si la suite représentée peut ou non avoir une limite finie. Si oui, en donner la valeur.



**Plan de Travail**

**En classe :** exo 17 p 144 ☐ exo 18 p 144 ☐ exo 19 p 144 ☐
exo 20 p 144 ☐ Activité 1 ☐

**En Vidéo** : Le cours

# 2 Limite d'une suite

## 2.1 Limite infinie

**Activité** 3 : Animation Géogébra

En faisant évoluer le paramètre $A$ observer le paramètre $p$ et la zone dédiée.
Essayer de déduire la définition d'une limite infinie d'une suite.

**Activité** 4 : Conjecturer une limite finie.

Conjecturer la limite de la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$.
Est-il possible de trouver un rang $n$, tel que $u_n > 1000000$ ?

Correction

**Définition** 1 : Limite infinie

Soit $(u_n)$ une suite réelle.

- On dit que $u_n$ tend vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ si, pour tout réel $A$, l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang.
  Autrement dit, il existe un entier naturel $N$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant A$.
  On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- On dit que $u_n$ tend vers $-\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ si, pour tout réel $A$, l'intervalle $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang.
  Autrement dit, il existe un entier naturel $N$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant A$.
  On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

**Remarque** : Pour les matheux !!

La même définition de la limite en $+\infty$ en langage mathématique donnerait : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N, u_n \geqslant A$

**Attention**

- Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante.
- Il est également faux de dire qu'une suite qui est strictement croissante tend forcément vers $+\infty$.

**Méthode 1** : Premier calcul de limite

Fixons un réel $A$. Démontrer que l'intervalle $]A;+\infty[$ contient, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite $(u_n)$, définie pour tout $n$, par $u_n = n^2$.
Que peut-on en conclure ?

Correction

# Plan de Travail

**En classe :** exo 22 p 144 ☐ exo 23 p 144 ☐ **Autonomie :** Exo 1 ☐ Exo 2 ☐ Exo 3 ☐

## 2.2 Limite finie : suite convergente

**Activité 5** : Approche de la démonstration d'une limite finie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{3-5n}{10n+2}$. Quelle semble être la limite de la suite $(u_n)$ ?

**Activité 6** : Animation Géogébra

En faisant évoluer le paramètre $\varepsilon$ observer le paramètre $p$ et la zone dédiée.
Essayer de déduire la définition d'une limite infinie d'une suite.

**Définition 2** : Limite finie

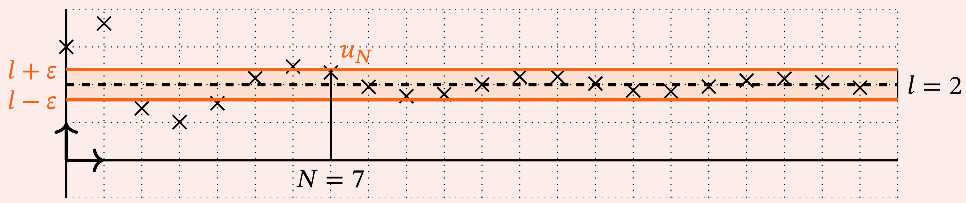
Soit $(u_n)$ une suite réelle et $l$ un réel.
On dit que $u_n$ tend vers $l$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ contient tous les termes de la suite $(u_n)$ à partir d'un certain rang.
Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N$ tel que, dès que $n \geqslant N$, on a $l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon$.
On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

**Remarque** : Pour les matheux !!

Une définition mathématique de la convergence d'une suite $(u_n)$ vers un réel $l$ est : $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \varepsilon$

**Illustration**

On a représenté graphiquement une certaine suite $(u_n)$ ci-dessous.




La suite $(u_n)$ semble tendre vers 2.
Par exemple, pour $\varepsilon = 0,4$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]2-\varepsilon; 2+\varepsilon[$, soit $]1,6\,;\,2,4[$ à partir du rang 7. Ce raisonnement vaut pour n'importe quel $\varepsilon$, aussi petit soit-il.

**Méthode** 2 : Déterminer une limite finie. Pour les matheux !!

Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
Appliquer la définition pour prouver sa limite :

Correction

# Plan de Travail

**En classe :** exo 21 p 144 ☐ exo 43 p 144 ☐ exo 44 p 144 ☐

**Définition** 3 : Suite convergente

On dit qu'une suite qui admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ converge vers $l$.
On dit aussi qu'une telle suite est **convergente**

Vidéo de cours

**Exemple**

On peut dire que la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ converge vers 1. On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

**Définition** 4 : Suite divergente

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

**Exemple**

On a vu précédemment que la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 1$ a pour limite $+\infty$.
$(u_n)$ est donc une suite **divergente**. Sa limite n'est pas finie. On peut dire que $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

**Remarque** : Attention !

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.
Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. C'est une suite alternée, qui n'admet donc pas de limite. Elle est donc divergente.

## S'évaluer

**QCM n°1**

**Méthode** 3 : Déterminer par le calcul une limite finie. Pour les matheux !

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = \dfrac{2n+1}{4n+5}$.
Déterminer la limite de $(u_n)$.

Correction

**Propriété** 1

Si une suite est convergente, elle est bornée.

**Propriété** 2 : Contraposée de la propriété 1

Si une suite n'est pas bornée, elle ne peut pas être convergente. Elle est donc divergente.

**Remarque**

La réciproque de la propriété 2 est fausse :
Toute suite bornée n'est pas nécessairement convergente. $u_n = \sin(n)$ par exemple.

**QCM n°2**

## Plan de Travail

**En classe :** exo 22 p 144 ☐ exo 23 p 144 ☐

### 2.3 Limites de suites usuelles

**En Vidéo** : Le cours

**Propriété** 3 : Les limites à connaître

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Plus généralement, pour tout entier naturel non nul $\alpha$,
$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$$

Les suites $(\cos(n))$, $(\sin(n))$ et $((-1)^n)$ n'admettent de limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**QCM n°3**

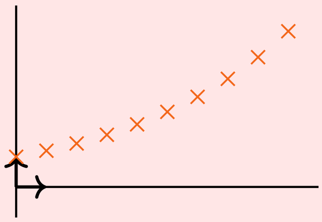
# 3 Suites géométriques et suites monotones

### 3.1 Suites du type $(q^n)$

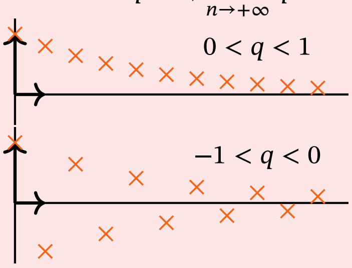
**Propriété** 4 : Limite de $(q^n)$

Soit $q$ un réel. On s'intéresse au comportement de la suite $(q^n)$ selon la valeur de $q$.

- Si $q > 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$



- Si $-1 < q < 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$




- Si $q = 1$, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $q \leqslant -1$, la suite $(q^n)$ n'admet pas de limite.

**Propriété** 5 : Autre formulation

Soit $q$ un réel.

- Si $q \leqslant -1$ alors la suite $(q^n)$ diverge et n'admet pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite $(q^n)$ converge vers 0.
- Si $q = 1$ alors la suite $(q^n)$ converge vers 1.
- Si $q > 1$ alors la suite $(q^n)$ diverge vers $+\infty$.

Démonstration en pdf Démonstration en vidéo

**Méthode** 4 : Déterminer la limite d'une suite du type $(q^n)$

Déterminer la limite des suites ci-dessous, définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad v_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$

Correction

**Méthode** 5 : Étudier la convergence d'une suite géométrique

Étudier la convergence de chacune des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$.

- $(u_n)$, suite géométrique de raison $-\frac{5}{2}$ et de premier terme égal à 4.
- $(v_n)$, suite géométrique de raison $e$ et de premier terme égal à $-3$.

Correction

## Plan de Travail

Exo 4 ☐ Exo 5 ☐ Exo 6 ☐ Exo 16 p 141 ☐

**QCM n°4**

### 3.2 Suites monotones

**Théorème** 1 : (admis)

Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels.

- Si $(u_n)$ est croissante et majorée, alors $(u_n)$ converge.
- Si $(u_n)$ est décroissante et minorée, alors $(u_n)$ converge.

**Théorème** 2 : Corollaire

- Si $(u_n)$ est croissante et majorée par $M$, alors $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$ telle que $\ell \leq M$.
- Si $(u_n)$ est décroissante et minorée par $m$, alors $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$ telle que $\ell \geq m$.

**Remarque** : Attention !!

Soit la suite $(u_n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
On démontra facilement que $(u_n)$ est croissante et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 5$.
On ne peut pas conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 5$
On peut simplement déduire que si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ alors $l \leqslant 5$

**Théorème** 3

- Si $(u_n)$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.
- Si $(u_n)$ est décroissante et non minorée, alors $(u_n)$ diverge vers $-\infty$.

Démonstration en vidéo

**Méthode** 6 : Déterminer qu'une suite est convergente.

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 4$, et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

1) Montrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est minorée par 2.
2) En déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante.
3) Que peut-on en déduire de la convergence de la suite $(u_n)$ ?

Correction

**Remarque**

On considère la suite $(u_n)$ de l'exercice précédent.
On peut a montré que cette suite est donc convergente. On note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
On a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$. Puisque la suite $(u_n)$ est convergente, on peut passer à la limite dans cette égalité.
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right)$
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) = \frac{1}{2}l + 1$.
Ainsi, $l$ est solution de l'équation $x = \frac{1}{2}x + 1$. On a donc $l = 2$.

## Plan de Travail

**En classe :** Exo 7 ☐ Exo 8 ☐ Exo 47 p 147 ☐

**QCM n°5**

# 4 Opérations sur les limites

## 4.1 Limite de la somme

**Activité** 7 : Forme indéterminée d'une somme de limites :

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - n$ et $v_n = n - n^2$
Conjecturer, à la calculatrice si besoin, la limite de chacune de ces limites ?

**Propriété** 6 : Tableau récapitulatif

On considère deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ et deux réels $l_1$ et $l_2$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $l_1$ | $l_1$ | $l_1$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $l_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$ | $l_1 + l_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | **Indéterminé** |

**Méthode** 7 : Premier calcul simple de limite :

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1000$.

Correction

**Méthode** 8 : Calculer la limite d'une somme

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = n^2 + e^{-n} - 4$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Correction

## Plan de Travail

**en classe :** Exo 9 ☐ Exo 25 p 145 ☐

**QCM n°6**

### 4.2 Limite du produit

**Activité** 8 : Forme indéterminée d'un produit de limites :

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n = \dfrac{2}{n}$, $v_n = n$ et $w_n = n^2$.
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n\, v_n)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n\, w_n)$

Correction

**Propriété** 7 : Tableau récapitulatif du produit de limites

On considère deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ et deux réels $l_1$ et $l_2$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ | $l_1$ | $l_1 \neq 0$ | $\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ | $l_2$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n\, v_n)$ | $l_1\, l_2$ | $\infty$ (r.s.) | $\infty$ (r.s.) | **Indéterminé** |

**r.s. : Règle des signes**

**Méthode** 9 : Déterminer la limite d'un produit de suites.

Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n = \left(\dfrac{3}{n} - 4\right) \times (n^2 + 2\sqrt{n})$.
Déterminer la limite de $(u_n)$.

Correction

## Plan de Travail

**en classe :** Exo 10 ☐ Exo 27 p 145 ☐ **en autonomie :** Exo 11 ☐

**QCM n°7**

### 4.3 Limite du quotient

**Propriété** 8 : Tableau récapitulatif des limites du quotient de deux suites

On considère deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $(v_n)$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On considère deux réels $l_1$ et $l_2$, avec $l_2 \neq 0$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $l_1$ | $l_1$ | $l_1 \neq 0$ | $\infty$ | $0$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $l_2 \neq 0$ | $\infty$ | $0^+$ ou $0^-$ | $l_2$, $0^+$ ou $0^-$ | $0$ | $\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ | $\dfrac{l_1}{l_2}$ | $0$ | $\infty$ (r.s.) | $\infty$ (r.s.) | **Indéterminé** | |

**r.s. : Règle des signes**

**Méthode** 10 : Déterminer la limite d'un quotient de deux suites

Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose $u_n = \dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{3+n}$. Déterminer la limite de $(u_n)$.

Correction

**Méthode** 11 : Déterminer la limite d'un quotient de deux suites

Pour tout entier naturel non nul $n$ on pose $u_n = \dfrac{1-n}{e^{-n}+\dfrac{1}{n}}$ Déterminer la limite de $(u_n)$.

Correction

**Plan de Travail**

**en classe :** Exo 30 p 145 ☐

**QCM n°8**

**En Vidéo** : Opérations avec les limites

# 5 Formes indéterminées

### 5.1 Factorisation par le terme dominant

**Méthode** 12 : Lever une indétermination avec des puissances de $n$

On utilise souvent une astuce, qui consiste à factoriser par le terme de plus haut degré. Dans beaucoup de situations, cette stratégie permet au final de "lever" l'indétermination, et de conclure.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $w_n = 4n^2 + 2n + 3$ et $v_n = 3n^2 + 7n - 1$.
Déterminer la limite de $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Correction

**Méthode** 13 : Lever une indétermination : $+\infty \times 0$

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$ par $u_n = (n^2 - 1)\left(\dfrac{2}{n-2}\right)$.

Correction pdf Correction vidéo

## Plan de Travail

**en classe :** Exo 12 ☐ Exo 31 p 145 ☐

**QCM n°9**

**En Vidéo** : Opérations avec les limites

### 5.2 Quantité conjuguée

**Méthode** 14 : Lever une indétermination avec des racines carrées.

Lorsque l'on est en présence d'une différence de racines carrées $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, on peut multiplier et diviser par la quantité conjuguée $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.
L'objectif est ici d'utiliser l'identité remarquable $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$. En particulier, dans le cas des racines carrées, cela entraîne que, pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$,

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = a - b$$

Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
Déterminer la limite de $(u_n)$.

Correction

## Plan de Travail

Exo 13 ☐ Exo 14 ☐

**QCM n°10**

# 6 Limites et comparaisons :

### 6.1 Théorèmes de comparaison (admis)

**Théorème** 4 : Théorème de comparaison

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang $N$, on a $u_n < v_n$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ,
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Démonstration en vidéo

**Théorème** 5 : Théorème de comparaison

Si, à partir d'un certain rang $N$, on a $v_n < u_n$, et $\lim \; u_n = -\infty$ ,

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$

QCM n°11

**Méthode** 15 : Lever une indétermination avec un théorème de comparaison.

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + \sqrt{2n^3 + 3n^2 + 4n + 5}$.

Correction

## 6.2 Théorèmes d'encadrement ou des gendarmes. (admis)

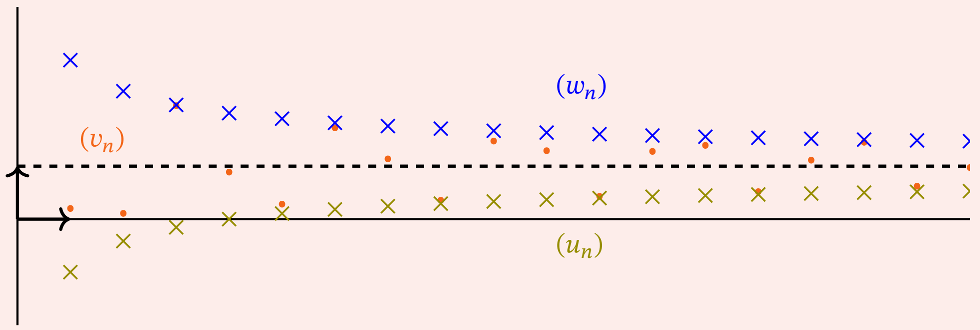
**Théorème** 6 : Théorème des gendarmes

Soit $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$, trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang $N$, on a $v_n < u_n < w_n$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L \in \mathbb{R}$ ,
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

QCM n°12

**Illustration**

Sur l'exemple suivant, trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ sont représentées. Pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si l'on sait que $(u_n)$ et $(w_n)$ sont convergentes de même limite, on en déduit la convergence et limite de la suite $(v_n)$.




**Méthode** 16 : Lever une indétermination avec le théorème des gendarmes.

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5 + \cos(n)}{n}$.

Correction pdf Correction en vidéo

## Plan de Travail

**en classe :** Exo 32 p 145 ☐ Exo 33 p 145 ☐ Exo 34 p 145 ☐ Exo 35 p 145 ☐ Exo 36 p 145 ☐ Exo 37 p 145 ☐

**en autonomie :** Exo 15 ☐ Exo 16 ☐ Exo 17 ☐ Exo 18 ☐

**En Vidéo** : Appliquer les théorèmes

## Plan de Travail : Sujets type Bac

Exo 19 ☐ Exo 20 ☐ Exo 21 ☐ Exo 22 ☐

Plan de travail

# Limites de suites

2

ANALYSE

## Définition

**Exercice 1**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est premier} \\ n^2 & \text{sinon} \end{cases}.$$

A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ?

**Exercice 2**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n+6}{n+1}$.

1) Donner des valeurs approchées au centième de $u_{10}, u_{100}, u_{1000}$
2) La suite $(u_n)$ semble-t-elle convergente ? Quelle serait sa limite ?
3) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 3 = \dfrac{3}{n+1}$. Quel est le signe de cette quantité ?
4) Soit $\varepsilon > 0$. Résoudre l'inéquation $u_n - 3 < \varepsilon$, d'inconnue $n \in \mathbb{N}$. Conclure

**Exercice 3**

Pour tout entier naturel $n$, on pose $u_n = (-1)^n$.
La suite $(u_n)$ semble-t-elle avoir une limite ?

## Suites géométriques et suites monotones

**Exercice 4**

Calculer les limites des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel $n$.

1) $u_n = -3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$
2) $v_n = 1 + 2 \times 0,99^n$
3) $w_n = 5 \times 1,99^n + 12$
4) $z_n = 8 + \sqrt{3}\left(-\frac{7}{8}\right)^n$

**Exercice 5**

Calculer les limites des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel $n$.

1) $u_n = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$
2) $v_n = 1 + \dfrac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

**Exercice 6**

Soit $n$ un entier naturel. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chacun des cas suivants.

$u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ $\quad v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ $\quad w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{8}{4^k}$

**Exercice 7**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 6$.

1) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)$.
2) Prouver par récurrence que $u_n \geq 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 6.$$
4) Conclure sur le sens de variation de la suite.
5) La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

**Exercice 8**

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$.

1) Prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n \geq 4$.

2) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 2$.
3) Conclure sur le sens de variation de la suite.
4) La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

## Opérations sur les limites

**Exercice 9**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non nul $n$,

1) $u_n = n^2 + \sqrt{n}$
2) $u_n = \frac{1}{n} - n^3$
3) $u_n = e^{-n} + 3n$
4) $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + n$
5) $u_n = -6n^2 + 1 + \frac{1}{n}$
6) $u_n = \frac{1+n}{n}$

**Exercice 10**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non nul $n$,

1) $u_n = (2n+1)\left(\frac{1}{n} + 2\right)$
2) $u_n = \left(3 + \frac{2}{n}\right)\left(\frac{5}{n^2} - 2\right)$
3) $u_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n}$
4) $u_n = \frac{e^n}{1 + \frac{1}{n}}$
5) $u_n = \frac{6 + \frac{3}{n^2}}{\frac{5}{n} - 1}$
6) $u_n = \frac{-1 + \frac{3}{n}}{\frac{1}{n^2}}$

**Exercice 11**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel non nul $n$,

1) $u_n = n^2 - n$
2) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)$
3) $u_n = \frac{3 + \sqrt{n}}{1 + \frac{2}{n}}$
4) $u_n = -2n^2 - \frac{5}{n+1}$
5) $u_n = \frac{5}{-1-n}$
6) $u_n = (3n+1)\left(\frac{1}{n} - 2\right)$

## Formes indéterminées

**Exercice 12**

En factorisant par le terme dominant, déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chacun des cas suivants.

1) $u_n = \frac{3n^3 + 2n - 5}{2 - 4n^3}$
2) $u_n = \frac{n^2+1}{n+3}$
3) $u_n = \frac{1 - 2n^3}{n^2 - 3n^3}$
4) $u_n = \frac{1 - 6n^4}{5n^6 + 2n^2 + 1}$
5) $u_n = \frac{n^2 - \frac{1}{n^4}}{n^3 + 3}$ pour $n > 0$

**Exercice 13**

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ dans chacun des cas suivants

1) $u_n = \sqrt{n-3} - \sqrt{n+8}$ 2) $u_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{2n+5}$
3) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}}$

**Exercice 14**

Pour tout entier naturel $n > 1$, on pose $u_n = \sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - n - 1}$. Déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la suite $(u_n)$.

## Théorèmes

**Exercice 15**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$u_n = n^2 + \sin(n)$.
Démontrer que $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

**Exercice 16**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier $n$ par la relation : $u_n = \frac{n^2 + \sin(n)}{n+5}$

Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \geq \frac{n^2 - 1}{n+5}$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2 + \sin(n)}{n+5}$

**Exercice 17**

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$

**Exercice 18**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier non-nul $n$ par la relation : $u_n = 5 - \frac{\sin(n^2)}{2\sqrt{n}}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

## Synthèse

**Exercice 19 : Suite auxiliaire**

On considère la suite $(u_n)$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \ u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n} \end{cases}$$

1) Calculer $u_1$ et $u_2$
2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $0 < u_n < 3$
3) Pour tout entier naturel $n$, on pose $a_n = \frac{1}{3 - u_n}$
   a) Justifier que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{3a_n - 1}{a_n}$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{3}$. Pour cela, on exprimera $a_{n+1}$ en fonction de $u_{n+1}$, puis en fonction de $u_n$, puis en fonction de $a_n$.

c) En déduire que la suite $(a_n)$ est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

d) Exprimer $a_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$.

e) Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?

## Exercice 20 : Nouvelle-Calédonie – Août 2023

On considère la suite $(u_n)$ telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3}$

Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$.

1) Donner $v_0$
2) Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique. On précisera son premier terme et sa raison.
3) En déduire une expression de $v_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$
4) En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{1}{n + 0.5} - 2$.
5) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

## Exercice 21

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$.

1) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x - 2}{2x - 1}$.
   Déterminer le sens de variations de $f$ sur son domaine de définition.
2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $u_n > 1$
3) Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$
   a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $v_{n+1} - v_n = 2$
   b) En déduire une expression de $v_n$ puis de $u_n$ pour tout entier naturel $n$
   c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

## Exercice 22 : Nouvelle-Calédonie – Août 2023 - 2

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n$, par : $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$.

1) a) Démontrer que $u_1 = 12$.
   b) Déterminer $u_2$ en détaillant le calcul.
   c) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite $(u_n)$.
2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n \geqslant n + 1$.
   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.
3) On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $v_n = u_n - n - 1$.
   a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique. Donner sa raison et son premier terme $v_0$.
   b) En déduire, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
   c) En déduire que pour tout entier naturel $n$ : $u_n = 2 \times 5^n + n + 1$.
   d) En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)$.
4) On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel $n$ tel que $u_n \geqslant 10^7$.

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

   a) Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
   b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

Accès corrections