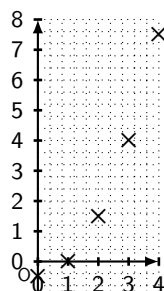
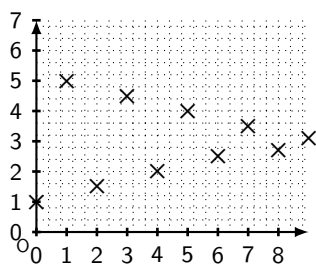
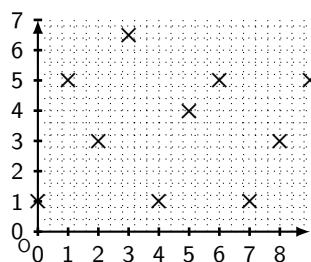
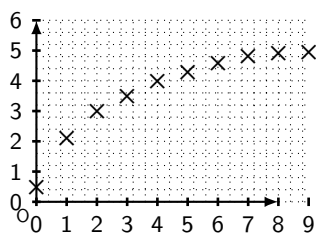


1 Approches de la notion de limite d'une suite :

Méthode 1 : Conjecturer graphiquement des limites de suites

A partir des représentations graphiques, conjecturer si la suite représentée peut ou non avoir une limite finie. Si oui, en donner la valeur.



Plan de Travail

Introduction : Activité 1 Activité 2

En classe : exo 17 p 144 exo 18 p 144 exo 19 p 144
exo 20 p 144 Activité 3

En Vidéo : Le cours



2 Limite d'une suite

2.1 Limite infinie

Définition 1 : Limite infinie

Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Autrement dit, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \geq A$.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

- On dit que u_n tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , l'intervalle $] -\infty; A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Autrement dit, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq A$.

On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Remarque : Pour les matheux !!

La même définition de la limite en $+\infty$ en langage mathématique donnerait : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N, u_n \geq A$

Attention

- Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante.
- Il est également faux de dire qu'une suite qui est strictement croissante tend forcément vers $+\infty$.

Méthode 2 : Premier calcul de limite

Fixons un réel A . Démontrer que l'intervalle $]A; +\infty[$ contient, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (u_n) , définie pour tout n , par $u_n = n^2$.

Que peut-on en conclure ?



Correction

Plan de Travail

En classe : exo 22 p 144 exo 23 p 144

Autonomie : Exo 1 Exo 2 Exo 3

En classe : Activité 4 Activité 5

2.2 Limite finie : suite convergente

Définition 2 : Limite finie

Soit (u_n) une suite réelle et l un réel.

On dit que u_n tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, dès que $n \geq N$, on a $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$.

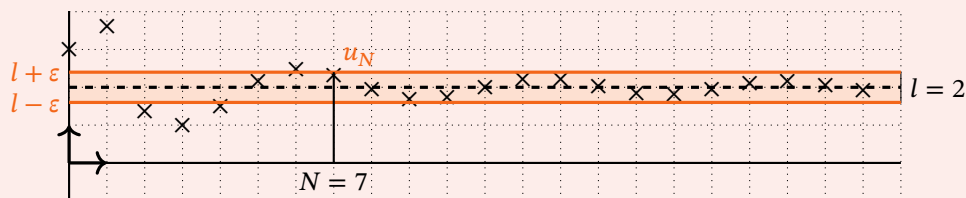
On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Remarque : Pour les matheux !!

Une définition mathématique de la convergence d'une suite (u_n) vers un réel l est : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - l| < \varepsilon$

Illustration

On a représenté graphiquement une certaine suite (u_n) ci-dessous.



La suite (u_n) semble tendre vers 2.

Par exemple, pour $\varepsilon = 0,4$, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]2 - \varepsilon; 2 + \varepsilon[$, soit $]1,6; 2,4[$ à partir du rang 7. Ce raisonnement vaut pour n'importe quel ε , aussi petit soit-il.

Méthode 3 : Déterminer une limite finie.

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$. Appliquer la définition pour prouver sa limite :
Soit $\varepsilon > 0$, déterminer N tel que, pour tout $n > N$, $1 - \varepsilon < u_n < 1 + \varepsilon$

Plan de Travail

En classe : exo 21 p 144 exo 43 p 144 exo 44 p 144

Définition 3 : Suite convergente

On dit qu'une suite qui admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ converge vers l .

On dit aussi qu'une telle suite est **convergente**



Vidéo de cours

Exemple

On peut dire que la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ converge vers 1. On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Définition 4 : Suite divergente

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemple

On a vu précédemment que la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = 2n + 1$ a pour limite $+\infty$.

(u_n) est donc une suite **divergente**. Sa limite n'est pas finie. On peut dire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

S'évaluer

Remarque : Attention !

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.
Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. C'est une suite alternée, qui n'admet donc pas de limite. Elle est donc divergente.



QCM n°1

Méthode 4 : Déterminer par le calcul une limite finie. Pour les matheux !

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \frac{2n+1}{4n+5}$.
Déterminer la limite de (u_n) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Correction

Propriété 1

Si une suite est convergente, elle est bornée.

Propriété 2 : Contraposée de la propriété 1

Si une suite n'est pas bornée, elle ne peut pas être convergente. Elle est donc divergente.

Remarque

La réciproque de la propriété 2 est fautive :
Toute suite bornée n'est pas nécessairement convergente. $u_n = \sin(n)$ par exemple.



QCM n°2

Plan de Travail

En classe : exo 22 p 144 exo 23 p 144

2.3 Limites de suites usuelles**Propriété 3** : Les limites à connaître

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Plus généralement, pour tout entier naturel non nul α ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$$

Les suites $(\cos(n))$, $(\sin(n))$ et $((-1)^n)$ n'admettent de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

En Vidéo : Le cours

QCM n°3

3 Suites géométriques et suites monotones

3.1 Suites du type (q^n)

Propriété 4 : Limite de (q^n)

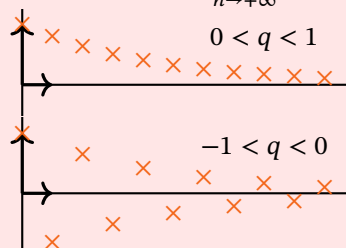
Soit q un réel. On s'intéresse au comportement de la suite (q^n) selon la valeur de q .

- Si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$



- Si $q = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

- Si $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$



- Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'admet pas de limite.

Propriété 5 : Autre formulation

Soit q un réel.

- Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$ alors la suite (q^n) converge vers 0.
- Si $q = 1$ alors la suite (q^n) converge vers 1.
- Si $q > 1$ alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration



Démonstration en pdf



Démonstration en vidéo

Méthode 5 : Déterminer la limite d'une suite du type (q^n)

Déterminer la limite des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel n .

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad v_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

.....

.....

.....



Correction

Méthode 6 : Étudier la convergence d'une suite géométrique

Étudier la convergence de chacune des suites suivantes définies sur \mathbb{N} .

- (u_n) , suite géométrique de raison $-\frac{5}{2}$ et de premier terme égal à 4.
- (v_n) , suite géométrique de raison e et de premier terme égal à -3 .



Correction

Plan de Travail

Exo 4 Exo 5 Exo 6 Exo 16 p 141



QCM n°4

3.2 Suites monotones

Théorème 1 : (admis)

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge.
- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge.

Théorème 2 : Corollaire

- Si (u_n) est croissante et majorée par M , alors (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leq M$.
- Si (u_n) est décroissante et minorée par m , alors (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \geq m$.

Remarque : Attention !!

Soit la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

On démontra facilement que (u_n) est croissante et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 5$.

On ne peut pas conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$

On peut simplement déduire que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ alors $l \leq 5$

Théorème 3

- Si (u_n) est croissante et non majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.



Démonstration en vidéo

Méthode 7 : Déterminer qu'une suite est convergente.

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$, et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

- 1) Montrer par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 2.
- 2) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
- 3) Que peut-on en déduire de la convergence de la suite (u_n) ?



Correction

Remarque

On considère la suite (u_n) de l'exercice précédent.

On peut avoir montré que cette suite est donc convergente. On note $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$

Puisque la suite (u_n) est convergente, on peut passer à la limite dans cette égalité.

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}u_n + 1 \right)$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}u_n + 1 \right) = \frac{1}{2}l + 1$.

Ainsi, l est solution de l'équation $x = \frac{1}{2}x + 1$. On a donc $l = 2$.



QCM n°5

Plan de Travail

En classe : Exo 7 Exo 8 Exo 47 p 147

4 Opérations sur les limites**4.1 Limite de la somme****Propriété 6 : Tableau récapitulatif**

On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) et deux réels l_1 et l_2 .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l_1	l_1	l_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l_2	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Indéterminé

Méthode 8 : Premier calcul simple de limite :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1000$.



Correction

Méthode 9 : Calculer la limite d'une somme

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = n^2 + e^{-n} - 4$.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

.....

.....

.....

.....



Correction

Plan de Travail

en classe : Exo 9 Exo 25 p 145 Activité 6 Activité 7



QCM n°6

4.2 Limite du produit**Propriété 7** : Tableau récapitulatif du produit de limites

On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) et deux réels l_1 et l_2 .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	l_2	∞	∞	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n)$	$l_1 l_2$	∞ (r.s.)	∞ (r.s.)	Indéterminé

r.s. : Règle des signes

Méthode 10 : Déterminer la limite d'un produit de suites.

Pour tout entier naturel non nul n , on pose $u_n = \left(\frac{3}{n} - 4\right) \times (n^2 + 2\sqrt{n})$.
Déterminer la limite de (u_n) .

.....

.....

.....



Correction

Plan de Travail

en classe : Exo 10 Exo 27 p 145

en autonomie : Exo 11



QCM n°7

4.3 Limite du quotient

Propriété 8 : Tableau récapitulatif des limites du quotient de deux suites

On considère deux suites réelles (u_n) et (v_n) telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On considère deux réels l_1 et l_2 , avec $l_2 \neq 0$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	l_1	l_1	$l_1 \neq 0$	∞	0	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l_2 \neq 0$	∞	0^+ ou 0^-	$l_2, 0^+$ ou 0^-	0	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right)$	$\frac{l_1}{l_2}$	0	∞ (r.s.)	∞ (r.s.)	Indéterminé	

r.s. : Règle des signes

Méthode 11 : Déterminer la limite d'un quotient de deux suites

Pour tout entier naturel non nul n on pose $u_n = \frac{1 + \frac{2}{n}}{3 + n}$. Déterminer la limite de (u_n) .

.....

.....

.....



Correction

Méthode 12 : Déterminer la limite d'un quotient de deux suites

Pour tout entier naturel non nul n on pose $u_n = \frac{1 - n}{e^{-n} + \frac{1}{n}}$. Déterminer la limite de (u_n) .

.....

.....

.....



Correction

Plan de Travail

en classe : Exo 30 p 145 □



QCM n°8

En Vidéo : Opérations avec les limites



5 Formes indéterminées

5.1 Factorisation par le terme dominant

Méthode 13 : Lever une indétermination avec des puissances de n

On utilise souvent une astuce, qui consiste à factoriser par le terme de plus haut degré. Dans beaucoup de situations, cette stratégie permet au final de "lever" l'indétermination, et de conclure.

Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = 4n^2 + 2n + 3$ et $v_n = 3n^2 + 7n - 1$. Déterminer la limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

.....

.....

.....

.....



Correction

Méthode 14 : Lever une indétermination : $+\infty \times 0$

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$ par $u_n = (n^2 - 1)\left(\frac{2}{n-2}\right)$.

.....

.....

.....

.....



Correction pdf



Correction vidéo

Plan de Travail

en classe : Exo 12 Exo 31 p 145



QCM n°9

En Vidéo : Opérations avec les limites



5.2 Quantité conjuguée

Méthode 15 : Lever une indétermination avec des racines carrées.

Lorsque l'on est en présence d'une différence de racines carrées $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, on peut multiplier et diviser par la quantité conjuguée $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

L'objectif est ici d'utiliser l'identité remarquable $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$. En particulier, dans le cas des racines carrées, cela entraîne que, pour tous réels strictement positifs a et b ,

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = a - b$$

Pour tout entier naturel non nul n , on note $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
Déterminer la limite de (u_n) .



Correction

Plan de Travail

Exo 13 Exo 14



QCM n°10

6 Limites et comparaisons :

6.1 Théorèmes de comparaison (admis)

Théorème 4 : Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur \mathbb{N} .
Si, à partir d'un certain rang N , on a $u_n < v_n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$



Démonstration en vidéo

Théorème 5 : Théorème de comparaison

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur \mathbb{N} .
Si, à partir d'un certain rang N , on a $v_n < u_n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$,
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$



QCM n°11

Méthode 16 : Lever une indétermination avec un théorème de comparaison.

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + \sqrt{2n^3 + 3n^2 + 4n + 5}$.



Correction

6.2 Théorèmes d'encadrement ou des gendarmes. (admis)

Théorème 6 : Théorème des gendarmes

Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) , trois suites définies sur \mathbb{N} .

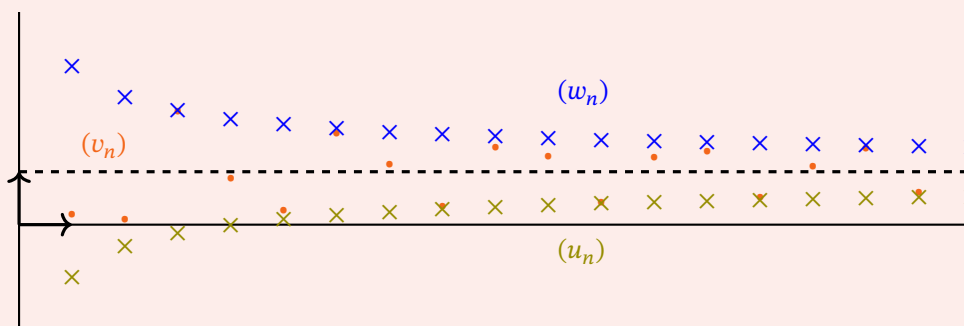
Si, à partir d'un certain rang N , on a $v_n < u_n < w_n$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$



QCM n°12

Illustration

Sur l'exemple suivant, trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) sont représentées. Pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si l'on sait que (u_n) et (w_n) sont convergentes de même limite, on en déduit la convergence et limite de la suite (v_n) .



Méthode 17 : Lever une indétermination avec le théorème des gendarmes.

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{5 + \cos(n)}{n}$.

.....

.....

.....

.....



Correction pdf



Correction en vidéo

Plan de Travail

- en classe : Exo 32 p 145 Exo 33 p 145 Exo 34 p 145
 Exo 35 p 145 Exo 36 p 145 Exo 37 p 145
 en autonomie : Exo 15 Exo 16 Exo 17
 Exo 18

En Vidéo : Appliquer les théorèmes



Plan de Travail : Sujets type Bac

- Exo 19 Exo 20 Exo 21 Exo 22