Cours & méthodes

# Nombres Complexes
## Point de vue algébrique

1 ANALYSE

## 1 Introduction

**En Vidéo**

Introduction historique

Introduction mathématique

## 2 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

### 2.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

**Théorème 1**

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ ;
- Il existe un nombre dans $\mathbb{C}$, noté i, tel que $\mathrm{i}^2 = -1$ ;
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = x + \mathrm{i}y$ où $x$ et $y$ sont deux réels.

**Définition 1**

L'écriture $z = x + \mathrm{i}y$, avec $x$ et $y$ réels est appelée la **forme algébrique** du nombre complexe $z$.

- $x$ est la **partie réelle** de $z$, notée $\Re(z)$ ;
- $y$ est la **partie imaginaire** de $z$, notée $\Im(z)$.

**Méthode 1** : Déterminer la partie imaginaire et la partie réelle d'un nombre complexe

Donner la partie réelle et la partie imaginaire de

$$z_1 = 2 - \mathrm{i}\sqrt{3} \quad , \quad z_2 = 3\mathrm{i} \quad , \quad z_3 = -5.$$

Correction

**Attention**

$\Re(z)$ et $\Im(z)$ sont des nombres réels, et tout nombre réel est un nombre complexe (dont la partie imaginaire est nulle) comme le montre $z_3$.

**Propriété** 1 : Unicité de l'écriture algébrique

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

**Remarque** : Cas particulier

En particulier, un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

**Plan de Travail**

18 p 34 ☐

**QCM n°1**

**En Vidéo**

Les bases calculatoires

## 2.2 Calculer dans $\mathbb{C}$

**Propriété** 2 : Règles de calculs dans $\mathbb{C}$

On définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$, une addition et une multiplication, qui suivent les mêmes règles que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$. On calcule donc dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$ en tenant compte de $\mathrm{i}^2 = -1$.

**Méthode** 2 : Déterminer la partie imaginaire et la partie réelle d'un nombre complexe

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + 3\mathrm{i}$ et $z_2 = -3 + 2\mathrm{i}$. Calculer :

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \times z_2$

Correction

**Plan de Travail**

28 p 34 ☐ 31 p 34 ☐ 55 p 36 ☐ 59 p 36 ☐ 60 p 36 ☐

**QCM n°2**

## 2.3 Identités remarquables généralisées dans $\mathbb{C}$

**Propriété** 3 : Identité remarquable dans $\mathbb{C}$

Pour tous réels $a$ et $b$, on a :

$$(a+\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 + 2\mathrm{i}ab \quad ; \quad (a-\mathrm{i}b)^2 = a^2 - b^2 - 2\mathrm{i}ab \quad ; \quad (a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) = a^2 + b^2$$

**Méthode** 3 : Démonstration des identités remarquables dans $\mathbb{C}$

Soient $a$ et $b$ deux réels, calculer :

$$(a+ib)^2 \quad ; \quad (a-ib)^2 \qquad (a+ib)(a-ib)$$

Correction

**Définition** 2 : Coefficient binomial

On appelle $\binom{n}{k}$, qui se lit $k$ parmi $n$, coefficient binomial, dont l'étude et des applications sont dans le programme de tronc commun.

**Remarque** 1 : Calcul du coefficient binomial

On peut calculer $\binom{n}{k}$ à la calculatrice ou en utilisant le triangle de Pascal.

**Propriété** 4 : Binôme de Newton

Pour tous réels $a$ et $b$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

**En Vidéo** : Le binôme de Newton

**Illustration** : Représentation du triangle de Pascal

On construit ce triangle, en partant du triangle de départ 1; 1; 1 sur les 2 premières lignes.
Sur les bords, on reporte des 1.
Puis, on reporte la somme de deux nombres voisins au milieu, à l'étage inférieur.
On met ensuite $n$ pour le numéro de lignes, et $k$ pour le rang en colonne, en n'oubliant pas qu'on commence par 0.

| | $k=0$ | $k=1$ | $k=2$ | … … | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ : | 1 | | | | | | |
| $n=1$ : | 1 | 1 | | | | | $a+b=a+b$ |
| $n=2$ : | 1 | 2 | 1 | | | | $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ |
| $n=3$ : | 1 | 3 | 3 | 1 | | | $(a+b)^3=a^2+3a^2b+3ab^2+b^3$ |
| $n=4$ : | 1 | … | … | … | … | | $(a+b)^4=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ |
| $n=5$ : | … | … | … | … | … | … | $(a+b)^5=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ |

Ainsi, on lit : $\binom{3}{2}=\dots \qquad \binom{3}{4}=\dots \qquad \binom{2}{5}=\dots$

**Méthode** 4 : Identités remarquables généralisées dans $\mathbb{C}$

Calculer :

$$(2+\mathrm{i})^3 \qquad ; \qquad (1-3\mathrm{i})^5$$

Correction

## Plan de Travail

30 p 34 ☐ 63 p 34 ☐ 64 p 34 ☐ 66 p 34 ☐ 67 p 34 ☐

**QCM n°3**

# 3 Conjuguer pour diviser

## 3.1 Conjugué d'un nombre complexe

**Définition** 3

Soit $z$ un nombre complexe de forme algébrique de la forme :
$z = x + \mathrm{i}y$ avec $x$ et $y$ réels.
Le **conjugué** de $z$ est le nombre complexe,
noté $\overline{z}$, ayant même partie réelle que $z$ et une partie imaginaire opposée,
c'est-à-dire $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

**En Vidéo**

Le conjugué

**Méthode** 5 : Déterminer le conjugué d'un nombre complexe

Déterminer le conjugué des nombres complexes

$$z_1 = 1 + 3\mathrm{i} \quad , \quad z_2 = -3 \quad \text{et} \quad z_3 = -5\mathrm{i}.$$

Correction

**Méthode** 6 : Résoudre une équation avec des conjugués

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$2z + \mathrm{i}\overline{z} = 3 - \mathrm{i}.$$

Correction

## Plan de Travail

21 p 34 ☐ 79 p 38 ☐ 80 p 38 ☐ 34 p 35 ☐

**QCM n°4**

**Propriété 5**

Soit $z$ un nombre complexe.

- $z+\overline{z}=2\Re z \quad$ et $\quad z-\overline{z}=2\mathrm{i}\times\Im(z)$.
- Le nombre complexe $z$ **est réel** si, et seulement si, $\overline{z}=z$ .
- Le nombre complexe $z$ **est imaginaire pur** si, et seulement si, $\overline{z}=-z$.
- Si $z=x+\mathrm{i}y$ avec $x$ et $y$ réels, alors $z\times\overline{z}=x^2+y^2$.

Démonstration

## 3.2 Inverse et quotients de nombres complexes

**Propriété 6**

Pour tout nombre complexe $z=a+ib$ non nul, il existe un nombre complexe $z'$ tel que $z\times z'=1$.
Ce nombre s'appelle l'**inverse de** $z$ , noté $\dfrac{1}{z}$ et il est tel que $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z\times\overline{z}}=\dfrac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$.

**Méthode 7** : Résoudre une équation avec des conjugués

Écrire sous forme algébrique les inverses des nombres complexes

$$z_1=2-\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2=2\mathrm{i}+1.$$

Correction

**Définition 4**

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes avec $z'$ non nul.
Le **quotient** de $z$ par $z'$ est le nombre complexe $\dfrac{z}{z'}=z\times\dfrac{1}{z'}=\dfrac{z\times\overline{z'}}{z'\times\overline{z'}}$

**Méthode 8** : Déterminer le conjugué d'une expression complexe.

Écrire sous forme algébrique le nombre complexe

$$z=\frac{1+\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}.$$

Correction

**Méthode 9** : Résoudre une équation avec des conjugués

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante et écrire la solution sous forme algébrique.

$$2\mathrm{i}z-3=z+\mathrm{i}$$

Correction

### 3.3 Conjugaison et opérations dans $\mathbb{C}$

**Propriété** 7

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes.

a) $\overline{\overline{z}} = z$

b) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

c) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

d) Pour tout entier naturel $n$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

e) Si $z' \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

**Plan de Travail**

23 p 34 ☐ 35 p 35 ☐ 36 p 35 ☐ 39 p 35 ☐
40 p 35 ☐ 41 p 35 ☐ 42 p 35 ☐ 94 p 39 ☐

**QCM n°5**

## 4 Équations du second degré à coefficients réels

### 4.1 Racines carrées d'un nombre réel dans $\mathbb{C}$

**Définition** 5

Soit $a$ un nombre réel.
Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = a$ sont appelées **racines carrées** de $a$ dans $\mathbb{C}$.

**Propriété** 8

Tout nombre réel non nul $a$ admet deux racines carrées dans $\mathbb{C}$.

- Si $a > 0$, ce sont les réels $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs $\mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-a}$

**Méthode** 10 : Résoudre une équation $z^2 = a$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + 8 = 0$ b) $9z^2 + 4 = 0$ c) $3z^2 - 5z = 0$

Correction

### 4.2 Équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a$, $b$ et $c$ réels

**Théorème** 2

Soit $a$, $b$ et $c$ trois réels avec $a \neq 0$.
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une racine réelle dite double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

**Méthode** 11 : Résoudre une équation $z^2 = a$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2z^2 + 3z - 5 = 0$ ; b) $z^2 - 4z + 8 = 0$ ; c) $z^4 + 2z^2 - 8 = 0$.

Correction

## Plan de Travail

43 p 34 ☐ 108 p 40 ☐ 110 p 40 ☐ 111 p 40 ☐ 113 p 41 ☐

**Synthèse :** 99 p 40 ☐ 100 p 40 ☐ 101 p 40 ☐

**QCM n°6**