

Nombres Complexes

Point de vue algébrique

1
ANALYSE

1 Introduction

En Vidéo



Introduction historique



Introduction mathématique

2 Ensemble \mathbb{C} des nombres complexes

2.1 Forme algébrique d'un nombre complexe

Théorème 1

Il existe un ensemble, noté \mathbb{C} , appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- \mathbb{C} contient l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} ;
- Il existe un nombre dans \mathbb{C} , noté i , tel que $i^2 = -1$;
- Tout élément de \mathbb{C} s'écrit de manière unique $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

Définition 1

L'écriture $z = x + iy$, avec x et y réels est appelée la **forme algébrique** du nombre complexe z .

- x est la **partie réelle** de z , notée $\Re(z)$;
- y est la **partie imaginaire** de z , notée $\Im(z)$.

Méthode 1 : Déterminer la partie imaginaire et la partie réelle d'un nombre complexe

Donner la partie réelle et la partie imaginaire de

$$z_1 = 2 - i\sqrt{3} \quad , \quad z_2 = 3i \quad , \quad z_3 = -5.$$



Correction

Attention

$\Re(z)$ et $\Im(z)$ sont des nombres réels, et tout nombre réel est un nombre complexe (dont la partie imaginaire est nulle) comme le montre z_3 .

Propriété 1 : Unicité de l'écriture algébrique

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Remarque : Cas particulier

En particulier, un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Plan de Travail

18 p 34



QCM n°1

En Vidéo

Les bases calculatoires

2.2 Calculer dans \mathbb{C} **Propriété 2** : Règles de calculs dans \mathbb{C}

On définit dans l'ensemble \mathbb{C} , une addition et une multiplication, qui suivent les mêmes règles que l'addition et la multiplication dans \mathbb{R} . On calcule donc dans \mathbb{C} comme dans \mathbb{R} en tenant compte de $i^2 = -1$.

Méthode 2 : Déterminer la partie imaginaire et la partie réelle d'un nombre complexe

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + 3i$ et $z_2 = -3 + 2i$. Calculer :

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $z_1 \times z_2$



Correction

Plan de Travail

28 p 34 31 p 34 55 p 36 59 p 36 60 p 36



QCM n°2

2.3 Identités remarquables généralisées dans \mathbb{C} **Propriété 3** : Identité remarquable dans \mathbb{C}

Pour tous réels a et b , on a :

$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab \quad ; \quad (a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2iab \quad ; \quad (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Méthode 3 : Démonstration des identités remarquables dans \mathbb{C}

Soient a et b deux réels, calculer :

$$(a + ib)^2 \quad ; \quad (a - ib)^2 \quad (a + ib)(a - ib)$$



Correction

Définition 2 : Coefficient binomial

On appelle $\binom{n}{k}$, qui se lit k parmi n , coefficient binomial, dont l'étude et des applications sont dans le programme de tronc commun.

Remarque 1 : Calcul du coefficient binomial

On peut calculer $\binom{n}{k}$ à la calculatrice ou en utilisant le triangle de Pascal.

Propriété 4 : Binôme de Newton

Pour tous réels a et b , on a :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

En Vidéo : Le binôme de Newton



Illustration : Représentation du triangle de Pascal

On construit ce triangle, en partant du triangle de départ 1; 1; 1 sur les 2 premières lignes.

Sur les bords, on reporte des 1.

Puis, on reporte la somme de deux nombres voisins au milieu, à l'étage inférieur.

On met ensuite n pour le numéro de lignes, et k pour le rang en colonne, en n'oubliant pas qu'on commence par 0.

$$k = 0 \quad k = 1 \quad k = 2 \quad \dots \dots$$

$n = 0 :$	1						
$n = 1 :$	1	1				$a + b = a + b$	
$n = 2 :$	1	2	1			$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	
$n = 3 :$	1	3	3	1			$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$n = 4 :$	1	$(a + b)^4 = \dots \dots \dots$	
$n = 5 :$	$(a + b)^5 = \dots \dots \dots$	

Ainsi, on lit : $\binom{3}{2} = \dots$ $\binom{3}{4} = \dots$ $\binom{2}{5} = \dots$

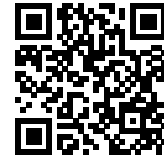
Méthode 4 : Identités remarquables généralisées dans \mathbb{C}

Calculer :

$$(2 + i)^3 \quad ; \quad (1 - 3i)^5$$



Correction

Plan de Travail30 p 34 63 p 34 64 p 34 66 p 34 67 p 34 

QCM n°3

3 Conjuguer pour diviser

3.1 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3Soit z un nombre complexe de forme algébrique de la forme :

$$z = x + iy \text{ avec } x \text{ et } y \text{ réels.}$$

Le **conjugué** de z est le nombre complexe,noté \bar{z} , ayant même partie réelle que z et une partie imaginaire opposée, c'est-à-dire $\bar{z} = x - iy$.**En Vidéo**

Le conjugué

Méthode 5 : Déterminer le conjugué d'un nombre complexe

Déterminer le conjugué des nombres complexes

$$z_1 = 1 + 3i \quad , \quad z_2 = -3 \quad \text{et} \quad z_3 = -5i.$$



Correction

Méthode 6 : Résoudre une équation avec des conjuguésRésoudre dans \mathbb{C} l'équation

$$2z + i\bar{z} = 3 - i.$$



Correction

Plan de Travail21 p 34 79 p 38 80 p 38 34 p 35 

QCM n°4

Propriété 5

Soit z un nombre complexe.

- $z + \bar{z} = 2\Re z$ et $z - \bar{z} = 2i \times \Im(z)$.
- Le nombre complexe z **est réel** si, et seulement si, $\bar{z} = z$.
- Le nombre complexe z **est imaginaire pur** si, et seulement si, $\bar{z} = -z$.
- Si $z = x + iy$ avec x et y réels, alors $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$.



Démonstration

3.2 Inverse et quotients de nombres complexes**Propriété 6**

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ non nul, il existe un nombre complexe z' tel que $z \times z' = 1$.

Ce nombre s'appelle l'**inverse** de z , noté $\frac{1}{z}$ et il est tel que $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Méthode 7 : Résoudre une équation avec des conjugués

Écrire sous forme algébrique les inverses des nombres complexes

$$z_1 = 2 - i \quad \text{et} \quad z_2 = 2i + 1.$$



Correction

Définition 4

Soient z et z' deux nombres complexes avec z' non nul.

Le **quotient** de z par z' est le nombre complexe $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = \frac{z \times \bar{z}'}{z' \times \bar{z}'}$

Méthode 8 : Déterminer le conjugué d'une expression complexe.

Écrire sous forme algébrique le nombre complexe

$$z = \frac{1 + i}{2 + 3i}.$$



Correction

Méthode 9 : Résoudre une équation avec des conjugués

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante et écrire la solution sous forme algébrique.

$$2iz - 3 = z + i$$



Correction

3.3 Conjugaison et opérations dans \mathbb{C}

Propriété 7

Soient z et z' deux nombres complexes.

a) $\overline{\overline{z}} = z$

b) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

c) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

d) Pour tout entier naturel n , $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

e) Si $z' \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

Plan de Travail

23 p 34 35 p 35 36 p 35 39 p 35

40 p 35 41 p 35 42 p 35 94 p 39



QCM n°5

4 Équations du second degré à coefficients réels

4.1 Racines carrées d'un nombre réel dans \mathbb{C}

Définition 5

Soit a un nombre réel.

Les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^2 = a$ sont appelées **racines carrées** de a dans \mathbb{C} .

Propriété 8

Tout nombre réel non nul a admet deux racines carrées dans \mathbb{C} .

- Si $a > 0$, ce sont les réels \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$

Méthode 10 : Résoudre une équation $z^2 = a$

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $z^2 + 8 = 0$

b) $9z^2 + 4 = 0$

c) $3z^2 - 5z = 0$



Correction

4.2 Équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c réels

Théorème 2

Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.

On considère dans \mathbb{C} l'équation $az^2 + bz + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une racine réelle dite double : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} .$$

Méthode 11 : Résoudre une équation $z^2 = a$

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a) $2z^2 + 3z - 5 = 0;$

b) $z^2 - 4z + 8 = 0;$

c) $z^4 + 2z^2 - 8 = 0.$

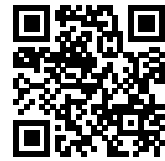


Correction

Plan de Travail

43 p 34 108 p 40 110 p 40 111 p 40 113 p 41

Synthèse : 99 p 40 100 p 40 101 p 40



QCM n°6