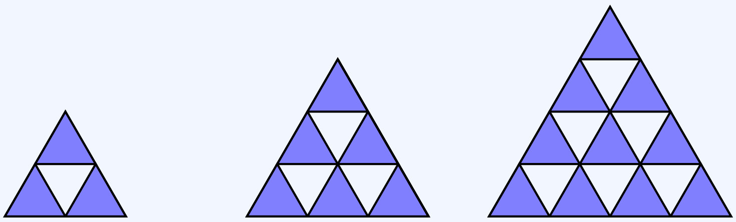
Cours & méthodes

Suites et récurrence

1 ANALYSE

Activité 1 : Introduction géométrique

On construit successivement des triangles équilatéraux, constitués eux mêmes de plus en plus de petits triangles équilatéraux, tous de la même taille, comme illustré sur la figure.
On note n le nombre de rangées de chaque triangle.



On a ainsi représenté les cas $n = 2$; $n = 3$ et $n = 4$.
Déterminer le nombre de petits triangles pour $n = 5$ puis pour $n = 100$.
Exprimer le nombre de petits triangles dans le cas général, pour un triangle à n rangées.

Activité 2 : Inspirée d'un sujet Bac

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

1) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2) Comment calculer u_{50} sans calculer tous les termes précédents ?
3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

1 Démonstration par récurrence

Illustration

Le principe du raisonnement par récurrence rappelle les dominos que l'on aligne et que l'on fait tomber, les uns à la suite des autres.

On positionne les dominos de telle sorte que, dès que l'un tombe, peu importe lequel, il entraîne le suivant dans sa chute. C'est **l'hérédité**.
Seulement, encore faut-il faire effectivement tomber le premier domino, sans quoi rien ne se passe : c'est **l'initialisation**.

Si ces deux conditions sont remplies, on est certain qu'à la fin, tous les dominos seront tombés : c'est notre **conclusion**.

Méthode : Les étapes d'une démonstration par récurrence

On utilise ce type de démonstration pour prouver qu'une proposition mathématique qui dépend d'un entier n, appelée $\mathcal{P}(n)$, est vraie.

La démonstration par récurrence comporte trois étapes :

- **Initialisation** : On montre qu'il existe un entier n_0 pour lequel $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;
  En pratique, on calcule $\mathcal{P}(0)$ ou $\mathcal{P}(1)$ pour vérifier que la proposition est cohérente avec les informations de l'énoncé.
- **Hérédité** : On montre que, si pour un entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est également ;
  C'est l'étape la plus difficile.
  En pratique, on écrit $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$.
  Cela permet de connaître le point de départ de notre démonstration et de visualiser notre objectif d'arrivée. On part de $\mathcal{P}(n)$ en la considérant vraie et on cherche à montrer par implication qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.
- **Conclusion** : On en conclut que pour tout entier $n \geqslant n_0$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Méthode 1 : Modèle de démonstration par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Correction

En Vidéo : Exercice corrigé avec détail de la méthode

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Correction en vidéo

Méthode 2 : Démontrer une inégalité par récurrence

Soit a un réel strictement positif.
Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$(1+a)^n \geqslant 1+na \quad (\textbf{Inégalité de Bernoulli})$$

Correction PDF

Plan de Travail

En classe : 48 p 27 ☐ 49 p 27 ☐ 53 p 27 ☐ 51 p 35 ☐

Autonomie : Exo 1 ☐ Exo 2 ☐ Exo 3 ☐ Exo 4 ☐ Exo 5 ☐ Exo 6 ☐

QCM n°1

2 Suites majorées, minorées, bornées

2.1 Définitions

Définition 1 : Suites majorées, minorées, bornées

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que :

- (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
  Un tel réel M est alors appelé *majorant* de la suite (u_n).
- (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.
  Un tel réel m est alors appelé *minorant* de la suite (u_n).
- (u_n) est *bornée* si (u_n) est à la fois majorée et minorée.

Remarque : Les majorants et minorants sont indépendants de n !

Bien que pour tout $n > 0$, on ait $n \leqslant n^2$, on ne peut pas dire que la suite (u_n) définie par $u_n = n$ est majorée.
Il n'existe en effet pas de réel M, tel que pour tout entier n, $n < M$.

Remarque : Ordre des quantificateurs !

Cette indépendance se traduit dans l'ordre des quantificateurs employés dans la définition précédente (le majorant y apparaît avant l'entier n) : (u_n) majorée $\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$
En écrivant les quantificateurs dans l'autre ordre, l'idée n'est plus la même :
$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leqslant M$ ne signifie pas nécessairement que (u_n) majorée
Si par exemple, $u_n = n$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un réel $M = n+1$ tel que $u_n \leqslant n+1$.
Pourtant (u_n) n'est pas majorée.

Exemple

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- On pose $u_n = \cos(n)$. La suite (u_n) est bornée puisque, pour tout entier n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$.
- On pose $v_n = n^2 + 1$.
  La suite (v_n) est minorée puisque pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$. En revanche, elle n'est pas majorée.
- On pose $w_n = (-1)^n n$. Cette suite n'est ni majorée, ni minorée.

Plan de Travail

En classe : 24 p 144 ☐ Exo 7 ☐

2.2 Application à la démonstration par récurrence

Propriété

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, une majoration ou une minoration de cette suite peut elle-même être démontrée par récurrence.

Méthode 3 : Démontrer par récurrence qu'une suite est majorée

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.5u_n + 2$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 4$

Correction PDF

Méthode 4 : Démontrer par récurrence qu'une suite définie par une fonction est majorée

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est le suivant.
On considère alors la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f	↗	3 ↘	0 ↗	

Correction PDF

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

Plan de Travail

En classe : Exo 8 ☐ **Autonomie :** Exo 9 ☐ Exo 10 ☐ Exo 11 ☐

QCM n°2

3 Suites croissantes, suites décroissantes

Définition 2 : Variations d'une suite

Soit (u_n) une suite réelle et n_0 un entier naturel.

- On dit que (u_n) est *croissante* à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- On dit que (u_n) est *décroissante* à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Propriété 1 : Étude du signe de la différence de deux termes consécutifs

- Si $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Propriété 2 : Étude du quotient de deux termes consécutifs

Soit (u_n) une suite **strictement positive** et n_0 un entier naturel.

- (u_n) est croissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- (u_n) est décroissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

Propriété 3 : Étudie des variations de la fonction associée

Soit (u_n) une suite numérique définie par une formule explicite $u_n = f(n)$

- Si la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur $[0;+\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

En Vidéo : Bilan des méthodes

Méthode 5 : Déterminer les variations d'une suite avec les propriétés de cours.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (u_n) est croissante.

Correction PDF

Méthode 6 : Déterminer les variations d'une suite avec les propriétés de cours.

Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Correction PDF

Méthode 7 : Déterminer les variations d'une suite par récurrence.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{5+u_n}$. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

Correction PDF

Plan de Travail

En classe : Exo 12 ☐ Exo 13 ☐ Exo 14 ☐ Exo 15 ☐

Autonomie : Exo 16 ☐ Exo 17 ☐ Exo 18 ☐

QCM n°3

Plan de Travail

Suites et récurrence

1 ANALYSE

Principe

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On souhaite démontrer la proposition suivante, notée $\mathcal{P}_n$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1) Montrer que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
2) Supposons qu'il existe un entier k tel que $\mathcal{P}_k$ est vraie.
   a) Écrire $\mathcal{P}_{k+1}$.
   b) Montrer que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
3) Conclure.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « $10^n + 1$ est divisible par 9. »

1) Montrer que s'il existe un entier k tel que $\mathcal{P}_k$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
2) Peut-on en conclure que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n ? Justifier.
3) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $10^n - 1$ est un multiple de 9.
4) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $\mathcal{P}_n$ est fausse pour tout entier naturel n.

Exercice 3

Soit r un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Soit donc (u_n) une suite arithmétique de raison r.

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + rn$.
2) **Application :** On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 8$
   a) Exprimer u_n en fonction de n
   b) Calculer u_{18} à l'aide de cette formule.

Exercice 4

Soit q un réel. On rappelle qu'une suite (u_n) est géométrique de raison q si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.
Soit donc (u_n) une suite géométrique de raison q.

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
2) **Application :** On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = -2$
   a) Exprimer u_n en fonction de n
   b) Calculer u_{12} à l'aide de cette formule.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 12$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 4 + 8 \times 3^n$.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}.$$

1) Calculer u_2 et u_3
2) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.
3) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 7

On considère la suite u_n définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5}$.
Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{9 - 8n}{3 + 8n}.$$

Exercice 8

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 9

Soit n un entier naturel non nul et

$$u_n = 1+3+5+7+\cdots+(2n-1).$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2) Conjecturer une expression simple de u_n en fonction de n puis démontrer cette conjecture par récurrence.

Suites majorées, minorées, bornées

Exercice 10

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la suite (u_n) est majorée, minorée, bornée.

1) $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ pour $n \neq 0$
2) $u_n = \cos(n) + \sin(n)$
3) $u_n = -3\cos(n) + 2\sin(n)$
4) $u_n = 2\cos(n) - n$
5) $u_n = \cos(n) + 3$
6) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{10}\,u_n + 8$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 10$.

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+3}{2}$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $3 \leqslant u_n \leqslant 5$

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier relatif n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$.
Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Exercice 14

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0.3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 4v_n - 4v_n^2$.

1) Pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $f(x) = 4x - 4x^2$.
   On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Donner une expression de $f'(x)$ pour tout réel $x \in [0;1]$
2) Étudier le signe de $f'(x)$
3) En déduire les variations de f et en déduire que pour tout réel x, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
4) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$.

Suites croissantes, suites décroissantes

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 - 24n + 3$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n,
   $u_{n+1} - u_n = 4n - 22$.
2) En déduire le sens de variations de la suite (u_n).

Exercice 16

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4$.

1) Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 8$.
2) Montrer que pour entier naturel n,
   $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{2}u_n + 4$.
3) Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 17

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2+u_n}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 18

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n - 7$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant -21$ et que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 19

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$ et que (u_n) est décroissante.

Exercice 20 : Bac 2021 – Métropole –

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}.$$

1) Montrer que la fonction f définie pour tout réel $x \in [0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
2) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

Exercice 21 : Bac 2022 – Centres étrangers

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = \dfrac{1}{10}$, $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} = \mathrm{e}^{-a_n} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1.$$

Exercice 22 : Bac 2022 – Métropole

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n}$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 23 : Bac 2021 – Métropole

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$$

1) Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$
3) En déduire le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$

Accès corrigé