Cours & méthodes

Suites et récurrence

1 ANALYSE

Plan de Travail : activité 1 ☐ activité 2 ☐

QCM n°1

1 Démonstration par récurrence

Illustration

Le principe du raisonnement par récurrence rappelle les dominos que l'on aligne et que l'on fait tomber, les uns à la suite des autres.

On positionne les dominos de telle sorte que, dès que l'un tombe, peu importe lequel, il entraîne le suivant dans sa chute. C'est **l'hérédité**.
Seulement, encore faut-il faire effectivement tomber le premier domino, sans quoi rien ne se passe : c'est **l'initialisation**.

Si ces deux conditions sont remplies, on est certain qu'à la fin, tous les dominos seront tombés : c'est notre **conclusion**.

Méthode : Les étapes d'une démonstration par récurrence

On utilise ce type de démonstration pour prouver qu'une proposition mathématique qui dépend d'un entier n, appelée $\mathcal{P}(n)$, est vraie.
La démonstration par récurrence comporte trois étapes :

- **Initialisation** : On montre qu'il existe un entier n_0 pour lequel $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;
  En pratique, on calcule $\mathcal{P}(0)$ ou $\mathcal{P}(1)$ pour vérifier que la proposition est cohérente avec les informations de l'énoncé.
- **Hérédité** : On montre que, si pour un entier $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est également ;
  C'est l'étape la plus difficile.
  En pratique, on écrit $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$.
  Cela permet de connaître le point de départ de notre démonstration et de visualiser notre objectif d'arrivée. On part de $\mathcal{P}(n)$ en la considérant vraie et on cherche à montrer par implication qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.
- **Conclusion** : On en conclut que pour tout entier $n \geqslant n_0$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple : Modèle de démonstration par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Correction

En Vidéo : Exercice corrigé avec détail de la méthode

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, on a

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Correction en vidéo

Méthode 1 : Rédiger une démonstration par récurrence

Soit a un réel strictement positif.
Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$(1+a)^n \geqslant 1+na \quad (\textbf{Inégalité de Bernoulli})$$

Correction PDF

Plan de Travail

En classe : 48 p 27 ☐ 49 p 27 ☐ 53 p 27 ☐ 51 p 35 ☐

Autonomie : Exo 1 ☐ Exo 2 ☐ Exo 3 ☐ Exo 4 ☐ Exo 5 ☐ Exo 6 ☐

QCM n°2

2 Suites majorées, minorées, bornées

2.1 Définitions

Définition 1 : Suites majorées, minorées, bornées

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que :

- (u_n) est *majorée* s'il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.
  Un tel réel M est alors appelé *majorant* de la suite (u_n).
- (u_n) est *minorée* s'il existe un réel m tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.
  Un tel réel m est alors appelé *minorant* de la suite (u_n).
- (u_n) est *bornée* si (u_n) est à la fois majorée et minorée.

Remarque : Les majorants et minorants sont indépendants de n !

Bien que pour tout $n>0$, on ait $n \leqslant n^2$, on ne peut pas dire que la suite (u_n) définie par $u_n=n$ est majorée.
Il n'existe en effet pas de réel M, tel que pour tout entier n, $n<M$.

Remarque : Ordre des quantificateurs !

Cette indépendance se traduit dans l'ordre des quantificateurs employés dans la définition précédente (le majorant y apparaît avant l'entier n) : (u_n) majorée $\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$
En écrivant les quantificateurs dans l'autre ordre, l'idée n'est plus la même :
$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leqslant M$ ne signifie pas nécessairement que (u_n) majorée
Si par exemple, $u_n=n$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un réel $M=n+1$ tel que $u_n \leqslant n+1$.
Pourtant (u_n) n'est pas majorée.

Exemple

Pour tout n, on pose $u_n = \cos(n)$.
La suite (u_n) est bornée puisque, pour tout entier n, $-1 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Exemple

Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = n^2 + 1$.
La suite (v_n) est minorée puisque pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant 1$. En revanche, elle n'est pas majorée.

Exemple

Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = (-1)^n\, n$. Cette suite n'est ni majorée, ni minorée.

Plan de Travail

En classe : 24 p 144 ☐ Exo 7 ☐

2.2 Application à la démonstration par récurrence

Propriété

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, une majoration ou une minoration de cette suite peut elle-même être démontrée par récurrence.

Méthode 2 : Démontrer par récurrence qu'une suite est majorée

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.5u_n + 2$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 4$

Correction PDF

Méthode 3 : Démontrer par récurrence qu'une suite définie par une fonction est majorée

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dont le tableau de variations est le suivant.
On considère alors la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f		$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Correction PDF

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$

Plan de Travail

En classe : Exo 8 ☐ **Autonomie :** Exo 9 ☐ Exo 10 ☐ Exo 11 ☐

QCM n°3

3 Suites croissantes, suites décroissantes

Définition 2 : Variations d'une suite

Soit (u_n) une suite réelle et n_0 un entier naturel.

- On dit que (u_n) est *croissante* à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- On dit que (u_n) est *décroissante* à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Propriété 1 : Étude du signe de la différence de deux termes consécutifs

- Si $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Propriété 2 : Étude du quotient de deux termes consécutifs

Soit (u_n) une suite **strictement positive** et n_0 un entier naturel.

- (u_n) est croissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.
- (u_n) est décroissante à partir de n_0 si, pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$.

En Vidéo : Bilan des méthodes

Propriété 3 : Étudie des variations de la fonction associée

Soit (u_n) une suite numérique définie par une formule explicite $u_n = f(n)$

- Si la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Méthode 4 : Déterminer les variations d'une suite avec les propriétés de cours.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - n$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (u_n) est croissante.

Correction PDF

Méthode 5 : Déterminer les variations d'une suite avec les propriétés de cours.

Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

Correction PDF

Méthode 6 : Déterminer les variations d'une suite par récurrence.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n}$.
Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

Correction PDF

Plan de Travail

En classe : Exo 12 ☐ Exo 13 ☐ Exo 14 ☐ Exo 15 ☐

Autonomie : Exo 16 ☐ Exo 17 ☐ Exo 18 ☐

QCM n°4