Parcours d'exercices

Etudes de signes

22

ANALYSE

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

1) $4x - 12 \leqslant 12x + 9$

2) $-6x - 1 > -9x - 4$

Exercice 2

Dresser le tableau de signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

1) $f(x) = 5x - 3$.

2) $f(x) = -2x - 3$.

MathALÉA

Exercice 3

1. Une fonction affine h définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $h(9) = 0$ et $h(4) = -20$.
Dresser son tableau de signes sur $\mathbb{R}$.
Justifier.
2. Une fonction affine v définie sur $\mathbb{R}$ est strictement décroissante. De plus $v(-10) = 0$.
a. Dresser son tableau de signes sur $\mathbb{R}$.
b. Donner une fonction v vérifiant les conditions précédentes.

MathALÉA

Exercice 4

On donne le tableau de signes d'une fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

a. Donner le sens de variations de g sur $\mathbb{R}$.
b. Comparer g(7) et g(8).

MathALÉA

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(4x + 12)(-2x + 6) > 0$$

MathALÉA

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(9x - 13)(-4x + 7) < 0$$

MathALÉA

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(-12x - 10)(2x - 4)(9x - 8) \leqslant 0$$

MathALÉA

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$(-4x - 10)^2(-2x + 6) \geqslant 0$$

MathALÉA

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{13x - 10}{-9x - 6} < 0$$

MathALÉA

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{-11x - 9}{5x + 9} > 0$$

MathALÉA

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$\frac{-5x - 6}{(-10x + 5)(-4x + 12)} > 0$$

MathALÉA

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{4x+3}{(-13x+12)^2} > 0$$

MathALÉA

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{4x-11}{6x-10} + 10 \geqslant 0$$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{-2x+12}{4x-4} - 6 \geqslant 0$$

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{x}{x+2} > 1$
2) $\dfrac{-x}{3x+1} > -3$
3) $\dfrac{x+2}{x-1} > \dfrac{x+1}{x}$

Exercice 16

Déterminer les signes des fonctions.

1) $f(x) = (x+6)^2 - 25$
2) $g(x) = (5x-3)^2 - (x-4)^2$

Exercice 17

Déterminer les signes des fonctions.

1) $h(x) = x^2 - 7x$
2) $k(x) = (-3x+8)(7x-4) - (-3x+8)(5-2x)$

Exercice 18

Déterminer les signes des fonctions.

1) $h(x) = \dfrac{x^2}{5x+3}$
2) $k(x) = \dfrac{-14x+12}{x^2+2}$

Exercice 19

Le prix x d'une paire de sneakers est compris entre 20€ et 50€.

L'offre est le nombre de paires de sneakers qu'une entreprise décide de proposer aux consommateurs au prix de x€. La demande est le nombre probable de paires de sneakers achetées par les consommateurs quand la paire de sneakers est proposée à ce même prix de x€.

La demande se calcule avec $d(x) = -750x + 45000$ pour x en milliers de paires de sneakers.

L'offre se calcule avec $f(x) = -\frac{500000}{x} + 35000$

Le but de cet exercice est de trouver pour quels prix l'offre est supérieure à la demande.

1) Écrire une inéquation traduisant le problème posé.
2) Démontrer que l'inéquation $f(x) > d(x)$ revient à montrer que $\frac{3x^2-40x-2000}{x} > 0$.
3) a) Démontrer que, pour tout x :

$$3x^2 - 40x - 2000 = (x+20)(3x-100).$$

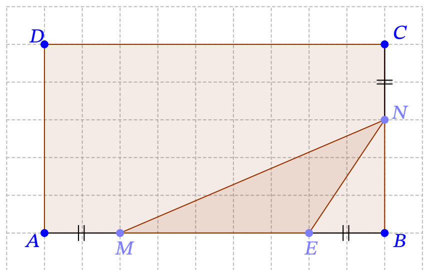
   b) En déduire les solutions de $f(x) > d(x)$.
   c) Conclure.

Exercice 20

On considère la figure suivante où $ABCD$ est un rectangle tel que $AD = 4$ et $AB = 8$.

M est un point de $[AB]$.

N et E sont des points des segments $[DC]$ et $[CB]$ tels que $NC = EB = AM$.



On souhaite obtenir une aire du triangle MEN supérieure ou égale à 9.

1) On note $x = \text{AM} = \text{CN} = \text{EB}$.

   Déterminer à quel intervalle I appartient x.
2) Montrer que l'aire du triangle MEN est égale à $16 - 8x + x^2$.
3) Montrer que le problème posé initialement revient à résoudre $(x-1)(x-7) \geqslant 0$ dans l'intervalle I.
4) Conclure.

Accès aux corrigés

(Correction)

Corrigé de l'exercice 1

1) $4x-12 \leqslant 12x+9$

On soustrait $12x$ aux deux membres.

$4x-12-12x \leqslant 12x+9-12x$

$-8x-12 \leqslant 9$

On ajoute 12 aux deux membres.

$-8x-12+12 \leqslant 9+12$

$-8x \leqslant 21$

On divise les deux membres par -8.

Comme -8 est négatif, l'inégalité change de sens.

$-8x\div(-8) \geqslant 21\div(-8)$

$x \geqslant \dfrac{21}{-8}$

$x \geqslant -\dfrac{21}{8}$

L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S = \left[-\dfrac{21}{8}, +\infty\right[$.

2) $-6x-1 > -9x-4$

On ajoute $9x$ aux deux membres.

$-6x-1+9x > -9x-4+9x$

$3x-1 > -4$

On ajoute 1 aux deux membres.

$3x-1+1 > -4+1$

$3x > -3$

On divise les deux membres par 3.

$3x\div 3 > -3\div 3$

$x > \dfrac{-3}{3}$

$x > -1$

L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S =]-1, +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 5

$(4x+12)(-2x+6) > 0$

$4x+12 > 0$ si et seulement si $x > -3$

$-2x+6 > 0$ si et seulement si $x < 3$

On peut donc en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$4x+12$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S =]-3;3[$.

Corrigé de l'exercice 6

$(9x-13)(-4x+7) < 0$

$9x-13 > 0$ si et seulement si $x > \dfrac{13}{9}$

$-4x+7 > 0$ si et seulement si $x < \dfrac{7}{4}$

On peut donc en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{13}{9}$		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$9x-13$		$-$	0	$+$		$+$	
$-4x+7$		$+$		$+$	0	$-$	
Produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S = \left]-\infty; \dfrac{13}{9}\right[\cup \left]\dfrac{7}{4}; +\infty\right[$.

Corrigé de l'exercice 7

$(-12x-10)(2x-4)(9x-8) \leqslant 0$

$-12x-10 > 0$ si et seulement si $x < -\dfrac{5}{6}$

$2x-4 > 0$ si et seulement si $x > 2$

$9x-8 > 0$ si et seulement si $x > \dfrac{8}{9}$

On peut donc en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{6}$		$\frac{8}{9}$		2		$+\infty$
$-12x-10$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$2x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$9x-8$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S = \left[-\dfrac{5}{6}; \dfrac{8}{9}\right] \cup \left[2; +\infty\right[$.

Corrigé de l'exercice 8

$(-4x-10)^2(-2x+6) \geqslant 0$

$-4x-10 = 0$ si et seulement si $x = -\dfrac{5}{2}$

Un carré étant toujours positif, $(-4x-10)^2 > 0$ pour tout x différent de $-\dfrac{5}{2}$.

$-2x+6 > 0$ si et seulement si $x < 3$

On peut donc en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$(-4x-10)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$-2x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
Produit		$+$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; 3]$.

Corrigé de l'exercice 9

$\dfrac{13x-10}{-9x-6} < 0$

• On commence par chercher les éventuelles valeurs interdites :

$-9x-6=0$

$-9x-6+6=+6$

$-9x=6$

$-9x\div(-9)=6\div(-9)$

$x=-\dfrac{6}{9}$

Donc $-9x-6=0$ si et seulement si $x=-\dfrac{2}{3}$.

Le quotient est défini sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\}$.

• On résout l'inéquation sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\}$:

$13x-10>0$ si et seulement si $x>\dfrac{10}{13}$.

$-9x-6>0$ si et seulement si $x<-\dfrac{2}{3}$.

On peut donc en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{10}{13}$		$+\infty$
$13x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$-9x-6$		$+$	0	$-$		$-$	
Produit		$-$	‖	$+$	0	$-$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S=\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right[\cup\left]\frac{10}{13};+\infty\right[$.

Corrigé de l'exercice 10

$\dfrac{-11x-9}{5x+9} > 0$

• On commence par chercher les éventuelles valeurs interdites :

$5x+9=0$

$5x+9-9=-9$

$5x=-9$

$5x\div5=-9\div5$

$x=-\dfrac{9}{5}$

Donc $5x+9=0$ si et seulement si $x=-\dfrac{9}{5}$.

Le quotient est défini sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{9}{5}\}$.

• On résout l'inéquation sur $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{9}{5}\}$:

$-11x-9>0$ si et seulement si $x<-\dfrac{9}{11}$.

$5x+9>0$ si et seulement si $x>-\dfrac{9}{5}$.

On peut donc en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{9}{5}$		$-\frac{9}{11}$		$+\infty$
$-11x-9$		$+$		$+$	0	$-$	
$5x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
Produit		$-$	‖	$+$	0	$-$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S=\left]-\frac{9}{5};-\frac{9}{11}\right[$.

Corrigé de l'exercice 11

$\dfrac{-5x-6}{(-10x+5)(-4x+12)} > 0$

• On commence par chercher les éventuelles valeurs interdites :

$(-10x+5)(-4x+12) = 0$ si et seulement si $-10x+5=0$ ou $-4x+12=0$.

$-10x+5=0$

$-10x+5-5=-5$

$-10x=-5$

$-10x\div(-10)=-5\div(-10)$

$x=\dfrac{5}{10}$

Donc $-10x+5 = 0$ si et seulement si $x=\dfrac{1}{2}$.

$-4x+12=0$

$-4x+12-12=-12$

$-4x=-12$

$-4x\div(-4)=-12\div(-4)$

$x=\dfrac{12}{4}$

Donc $-4x+12 = 0$ si et seulement si $x=3$.

Le quotient est défini sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2};3\}$.

• On résout l'inéquation sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2};3\}$:

$-5x-6>0$ si et seulement si $x<-\dfrac{6}{5}$.

$-10x+5>0$ si et seulement si $x<\dfrac{1}{2}$.

$-4x+12>0$ si et seulement si $x<3$.

On peut donc en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{6}{5}$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$-5x-6$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$-10x+5$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$-4x+12$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Produit		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S=\left]-\infty;-\frac{6}{5}\right[\cup\left]\frac{1}{2};3\right[$.

Corrigé de l'exercice 12

$\dfrac{4x+3}{(-13x+12)^2} > 0$

• On commence par chercher les éventuelles valeurs interdites :

$(-13x+12)^2 = 0$ si et seulement si $-13x+12=0$.

$-13x+12=0$

$-13x+12-12=-12$

$-13x=-12$

$-13x\div(-13)=-12\div(-13)$

$x=\dfrac{12}{13}$

Donc $-13x+12 = 0$ si et seulement si $x=\dfrac{12}{13}$.

Le quotient est défini sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{12}{13}\}$.

• On résout l'inéquation sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{12}{13}\}$:

$4x+3>0$ si et seulement si $x<-\dfrac{3}{4}$.

Un carré étant toujours positif, $(-13x+12)^2>0$ pour tout x différent de $\dfrac{12}{13}$.

On peut donc en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$\frac{12}{13}$		$+\infty$
$4x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-13x+12)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
Quotient		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S=\left]-\frac{3}{4};+\infty\right[\setminus\{\frac{12}{13}\}$.

Corrigé de l'exercice 13

$\dfrac{4x-11}{6x-10}+10 \geqslant 0$

• On commence par chercher les éventuelles valeurs interdites :

$6x-10=0$

$6x-10+10=+10$

$6x=10$

$6x \div 6 = 10 \div 6$

$x=\dfrac{10}{6}$

Donc $6x-10=0$ si et seulement si $x=\dfrac{5}{3}$.

Le quotient est défini sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{\frac{5}{3}\}$.

• On résout l'inéquation sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{\frac{5}{3}\}$:

$\dfrac{4x-11}{6x-10}+10=\dfrac{64x-111}{6x-10}$

$64x-111>0$ si et seulement si $x>\dfrac{111}{64}$.

$6x-10>0$ si et seulement si $x>\dfrac{5}{3}$.

On peut donc en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$\frac{111}{64}$		$+\infty$
$64x-111$		$-$		$-$	0	$+$	
$6x-10$		$-$	0	$+$		$+$	
Quotient		$+$	||	$-$	0	$+$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S=\left]-\infty;\frac{5}{3}\right[\cup\left[\frac{111}{64};+\infty\right[$.

Corrigé de l'exercice 14

$\dfrac{-2x+12}{4x-4}-6 \geqslant 0$

• On commence par chercher les éventuelles valeurs interdites :

$4x-4=0$

$4x-4+4=+4$

$4x=4$

$4x \div 4 = 4 \div 4$

$x=\dfrac{4}{4}$

Donc $4x-4=0$ si et seulement si $x=1$.

Le quotient est défini sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$.

• On résout l'inéquation sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$:

$\dfrac{-2x+12}{4x-4}-6=\dfrac{-26x+36}{4x-4}$

$-26x+36>0$ si et seulement si $x<\dfrac{18}{13}$.

$4x-4>0$ si et seulement si $x>1$.

On peut donc en déduire le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{18}{13}$		$+\infty$
$-26x+36$		$+$		$+$	0	$-$	
$4x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
Quotient		$-$	||	$+$	0	$-$	

L'ensemble de solutions de l'inéquation est $S=\left]1;\frac{18}{13}\right]$.

Corrigé de l'exercice 15

1) $\mathcal{S}=]-\infty;-2[$

2) $\mathcal{S}=]-\infty;-\frac{3}{8}[\cup]-\frac{1}{3};+\infty[$

3) $\mathcal{S}=]-\frac{1}{2};0[\cup]1;+\infty[$

Corrigé de l'exercice 16

1) $f(x)=(x+6)^2-25$.

x	$-\infty$		-11		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) $g(x)=(5x-3)^2-(x-4)^2$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{7}{6}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Corrigé de l'exercice 17

1) $h(x) = x^2 - 7x$.

x	$-\infty$		0		7		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) $k(x) = (-3x+8)(7x-4) - (-3x+8)(5-2x)$.

x	$-\infty$		1		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Corrigé de l'exercice 18

1) $h(x) = \dfrac{x^2}{5x+3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		0		$+\infty$
$h(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$+$	

2) $k(x) = \dfrac{-14x+12}{x^2+2}$.

x	$-\infty$		$\frac{6}{7}$		$+\infty$
$k(x)$		$+$	0	$-$	

Corrigé de l'exercice 19

1. L'offre est supérieure à la demande si $f(x) > d(x)$

2. $f(x) > d(x) \Leftrightarrow -\frac{500000}{x} + 35000 > -750x + 45000 \Leftrightarrow -\frac{500000}{x} + 35000 + 750x - 45000 > 0 \Leftrightarrow \frac{-500000+35000x+750x^2-45000x}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{750x^2-10000x-500000}{x} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2-40x-2000}{x} > 0$

3. a) $(x+20)(3x-100)$

$= 3x^2 - 100x + 60x - 2000$

$= 3x^2 - 40x - 2000$

b) $f(x) > d(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-40x-2000}{x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+20)(3x-100)}{x} > 0$$

c) $\mathcal{S} = \left[\frac{100}{3}; 50\right]$

Corrigé de l'exercice 20

1. a) $I = [0; 4]$

2. $\mathcal{A}_{\text{MEN}} = \dfrac{\text{ME} \times \text{NB}}{2}$

$= \dfrac{(8-2x)\times(4-x)}{2} = \dfrac{32-8x-8x+2x^2}{2}$

$= \dfrac{32-16x+2x^2}{2} = 16 - 8x + x^2$

3. $\mathcal{A}_{\text{MEN}} \geqslant 9 \Leftrightarrow 16 - 8x + x^2 \geqslant 9$

$(4-x)^2 \geqslant 9 \Leftrightarrow (4-x)^2 - 9 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (4-x+3)(4-x-3) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (7-x)(1-x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow (x-7)(x-1) \geqslant 0$

4. On résout l'inéquation en tenant compte de l'intervalle I. On obtient $\mathcal{S} = [0; 1]$.