Cours & méthodes

Produit scalaire

14

GEOMETRIE

1 Ce qu'il faut connaître pour démarrer :

Rappels : **Les bases avec les vecteurs :**

Soient, dans un repère orthonormé, deux points : $\mathrm{A}\,(x_{\mathrm{A}}; y_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}\,(x_{\mathrm{B}}; y_{\mathrm{B}})$, et deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \end{pmatrix}$ $\qquad \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \sqrt{(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})^2}$ $\qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Méthode : Calculer les coordonnées et la norme d'un vecteur. (Niveau *)

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on donne les points suivants :
$R\,(0\,;\,1)$ et $S\,(-1\,;\,4)$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{RS}$ et calculer $\|\overrightarrow{RS}\|$.

Correction pdf

Rappels : **Les vecteurs colinéaires**

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$

Méthode : Déterminer la colinéarité de deux vecteurs à partir de leur déterminant. (Niveau *)

On calcule le déterminant des deux vecteurs. S'il est égal à 0, on peut conclure qu'ils sont colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont-ils des vecteurs colinéaires ?

Correction pdf

Rappels : **Géométrie repérée :**

I milieu de $[AB]$ $\iff$ $I\left(\dfrac{x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{A}}}{2} \;;\; \dfrac{y_{\mathrm{B}} + y_{\mathrm{A}}}{2}\right)$; $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)}$

Méthode : Calculer une longueur et les coordonnées du milieu d'un segment. (Niveau *)

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2;-4)$ et $B(5;-1)$.
Calculer la longueur AB et les coordonnées du point I milieu de $[AB]$.

Correction pdf

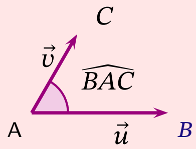
S'évaluer :

QCM n°1

2 Définition du produit scalaire avec les normes de vecteurs :

Définition : Angle de deux vecteurs

Soit deux vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$, l'angle géométrique $\widehat{BAC}$
où $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
On a l'égalité : $\widehat{BAC} = \left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$



Vidéo de cours

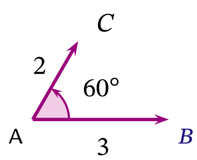
Définition : Produit scalaire et norme

On appelle produit scalaire de deux vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Méthode : Utiliser la définition du produit scalaire avec les normes.

Dans la situation représentée ci-dessous,
calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



Correction

S'évaluer :

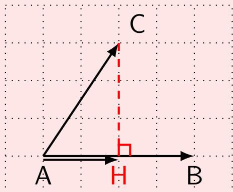
QCM n°2

3 Définition du produit scalaire avec le projeté orthogonal :

Définition : Produit scalaire et projeté orthogonal

Soit trois points distincts du plan, A, B, et C.
Soit H le projeté orthogonal de C sur(AB).
On a alors

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}}$$



Vidéo de cours

Propriété : Calcul du produit scalaire avec le projeté orthogonal :

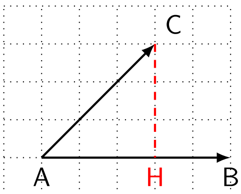
Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan.
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

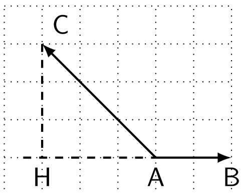
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est défini par :

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle aigu ;
- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = -AB \times AH$ si les deux vecteurs forment un angle obtus.

Méthode : Calculer un produit scalaire avec le projeté orthogonal (Niveau 1)

Dans chacune des deux situations ci-dessous, calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$





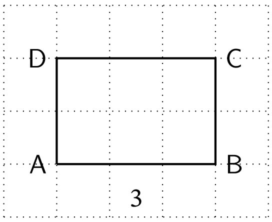
Correction

Remarque : Signe du produit scalaire

- Si l'angle vectoriel est aigu, le produit scalaire est positif.
- Si l'angle vectoriel est obtus, le produit scalaire est négatif.

Méthode : Appliquer la définition (Niveau 2)

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 3$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



Correction

Remarque

N'essayez pas d'interpréter le produit scalaire de façon géométrique car dans un cas général, le produit scalaire n'a aucune signification géométrique particulière.
Ce pendant, il existe un cas où le produit scalaire a une signification géométrique ; c'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

S'évaluer :

QCM n°3

4 Orthogonalité de deux vecteurs

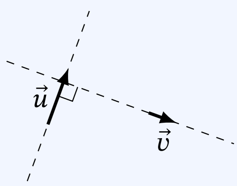
Définition : Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs sont orthogonaux si leur support (les droites ayant la même direction) forment un angle droit.

Vidéo de cours

Exemple

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont orthogonaux :

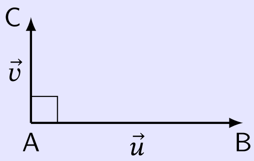


Propriété : Produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux } \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0.$$

Démonstration

- Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux.



Par définition, si on note H le projeté orthogonal de C sur (AB), on a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \mathrm{AB}\times\mathrm{AH}\\ &= \mathrm{AB}\times 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

- Supposons que $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
  Notons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, puis H le projeté orthogonal de C sur (AB).
  Alors, $AB \times AH = 0$. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, $AB \neq 0$, ce qui signifie donc que $AH = 0$.
  Or, $H \in (AB)$ par construction, donc H est confondu avec A.
  H étant le projeté orthogonal de C sur (AB), cela signifie que (AC) est perpendiculaire à (AB), c'est-à-dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
  Ainsi, si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Remarque : Type de démonstration classique :

Ce schéma de démonstration est très classique en maths.
Pour prouver une équivalence $A \iff B$, on procède en deux parties :
On commence par montrer $A \Rightarrow B$ puis on montre que $B \Rightarrow A$.
Il est souvent plus simple de faire deux démonstrations "par implications successives".

Remarque : Valeur remarquable du produit scalaire

Cette propriété est fondamentale. Le produit scalaire est donc un moyen de caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs. C'est un outil essentiel que nous allons beaucoup utiliser.

S'évaluer :

QCM n°4

5 Propriétés algébriques du produit scalaire

Propriété : Distributivité :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. Alors,

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}\,.$$

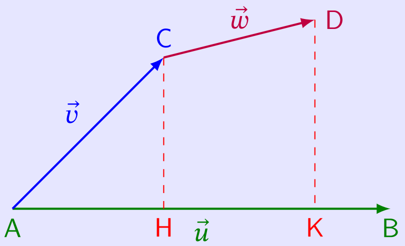
Vidéo de cours

Remarque : Un air de déjà vu

Cette propriété de distributivité du produit scalaire sur la somme de vecteurs est la même que celle que l'on connaît avec les réels, entre la multiplication et l'addition : $k(a+b) = k \times a + k \times b$.

Démonstration

Considérons les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme sur le schéma ci-dessous. On ne considérera que le cas où les produits scalaires rencontrés sont positifs (car le cas où ils sont négatifs est similaire).



D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} \\ &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AK}\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AH}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{w} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} \\ &= \mathrm{AB} \times \mathrm{HK}\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AH} + \mathrm{AB} \times \mathrm{HK} \\ &= \mathrm{AB} \times (\mathrm{AH} + \mathrm{HK}) \\ &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AK}\,. \qquad (2)\end{aligned}$$

Des égalités (1) et (2), on peut déduire : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
Quels que soient les points A, B, C et D du plan :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}.\end{aligned}$$

Symétrie

Propriété : Commutativité

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan,
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left[-(\vec{v}, \vec{u})\right] \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u}) && \text{car la fonction } x \mapsto \cos x \text{ est paire} \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}, \vec{u}) && \text{car pour } a \text{ et } b \text{ réels, } a \times b = b \times a \\ &= \vec{v} \cdot \vec{u}\,.\end{aligned}$$

Bilinéarité

Propriété : Bilinéarité

Soit $k \in \mathbb{R}^*$, et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. Alors,

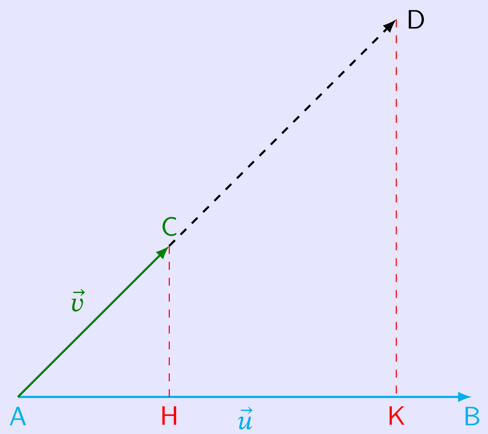
$$(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) .$$

Remarque : Attention !!

Encore une fois, on peut réaliser un parallèle avec les réels et la multiplication : $k(a \times b) = ka \times b$.
Attention toutefois de bien souligner que dans le cas du produit scalaire, cette propriété comporte deux opérateurs distincts et des objets de natures différentes :
$k \in \mathbb{R}$ alors que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs.
On distinguera bien les opérations :

- $ku = k \times \vec{u}$ est une multiplication d'un réel par un vecteur comme vu en seconde.
- $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un produit scalaire.

Démonstration



Notons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\lambda\vec{v} = \overrightarrow{AD}$.
D'après le théorème de Thalès :
$AD = kAC \Longrightarrow AK = kAH$
Donc :

$$\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = AB \times AK \qquad = AB \times kAH$$
$$= kAB \times AH$$

$$k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = kAB \times AH .$$

Donc, $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
Un raisonnement analogue montrerait que :

$(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Carré d'une norme

Propriété

Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Démonstration

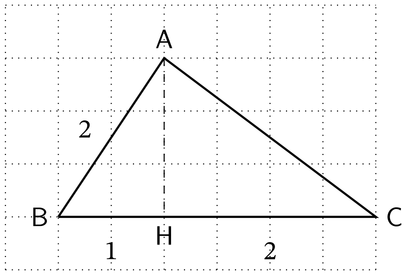
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}\ ;\ \vec{u}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 \\ &= \|\vec{u}\|^2.\end{aligned}$$

Méthode : Utiliser les propriétés algébriques pour calculer un produit scalaire

En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, qui n'est pas réalisée à l'échelle, calculer les produits scalaires suivants :

1) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$

2) $\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$



Correction pdf

S'évaluer :

QCM n°5

6 Produit scalaire avec les identités remarquables de normes

Propriété : identités remarquables

Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v} \qquad \|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2&=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2\\&=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\\&=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\|\vec{u}-\vec{v}\|^2&=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2\\&=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2\\&=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

Propriété : Nouvelles formules !!

Pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan,

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right) \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

Vidéo de cours

Démonstration

Nous avons vu précédemment que : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
que l'on peut aussi écrire : $|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ En isolant $\vec{u}\cdot\vec{v}$, on arrive à :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)}\,.$$

On procède de même avec $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2$ pour prouver l'autre égalité, moins utilisée.

Remarque : Encore une manière de calculer un produit scalaire !

Cette égalité se retrouve facilement avec l'identité remarquable, en isolant le produit.
Elle permet de calculer un produit scalaire quand on connait les normes des deux vecteurs et que le vecteur $u \vec{+} v$ est connu, ou facile à trouver.

Méthode : Utiliser l'égalité des identités remarquables pour calculer un produit scalaire

On pense à utiliser la relation des identités remarquables dans cette situation car :

- Un des vecteurs du produit scalaire manque d'information. On ne connaît donc pas sa norme.
- On ne voit pas de projection simple.
- Le parallélogramme donne des égalités vectorielles qui permettent d'introduire des sommes de vecteurs.

$ABCD$ parallélogramme tel que : $AB = 4$, $BC = 3$ et $AC = 6$.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

Correction pdf

7 Calcul du produit scalaire avec les coordonnées

Propriété

Dans un repère orthonormé ,
on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'\,.$$

Vidéo de cours

Démonstration

D'après la propriété précédente, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.

On sait que : $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$ car on est dans un repère orthonormé.
De plus, on connaît les coordonnées de $(\vec{u} - \vec{v})\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$ donc :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 = x'^2 - 2xx' + x^2 + y'^2 - 2yy' + y^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi,} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - x'^2 + 2xx' - x^2 - y'^2 + 2yy' - y^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') = xx' + yy' \end{aligned}$$

Méthode : Utiliser l'égalité des identités remarquables pour calculer un produit scalaire

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ deux vecteurs d'un repère orthonormé .
Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Correction pdf

S'évaluer :

QCM n°6

8 Déterminer la mesure d'un angle avec le produit scalaire.

Méthode : Utiliser le produit scalaire pour déterminer la mesure d'un angle.

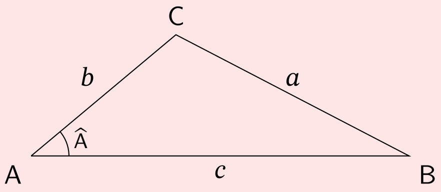
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ deux vecteurs d'un repère orthonormé .
On pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.
Déterminer une mesure approchée de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$

Correction pdf

---

9 Formule d'Al-Kashi :

Propriété : Généralisation du théorème de Pythagore :



Démonstration fondamentale en vidéo

Soit ABC un triangle quelconque.
En notant : $a = \text{BC}$, $b = \text{AC}$, $c = \text{AB}$, $\widehat{\text{A}} = ABAC$,
on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\text{A}}\ .$$

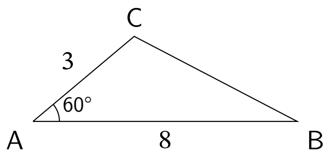
Démonstration

$$\overrightarrow{\text{BC}}^2 = \left(\overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{AC}}\right)^2 = \overrightarrow{\text{BA}}^2 + 2\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}} + \overrightarrow{\text{AC}}^2 = \text{BA}^2 + 2\text{BA}\times\text{AC}\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}}\right) + \text{AC}^2$$

$$= \text{AB}^2 + \text{AC}^2 + 2\text{AB}\times\text{AC}\times\left(-\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}}\right)\right) = \text{AB}^2 + \text{AC}^2 - 2\text{AB}\times\text{AC}\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}}\right)\ .$$

Méthode : Appliquer la formule d'Al-Kashi.

Déterminer la longueur BC et les angles $\widehat{\text{B}}$ et $\widehat{\text{C}}$ du triangle ci-dessous.



Correction pdf

S'évaluer :

QCM n°7

10 Lignes de niveaux

Propriété

Pour tous points A, B et M du plan, où I est le milieu de $[AB]$,

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Démonstration en vidéo

Démonstration

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\ &= MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\ &= MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)}_{=\vec{0}}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= MI^2+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}\\ &= MI^2+\left(-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= MI^2-\frac{1}{4}AB^2.\end{aligned}$$

Propriété

Soient A et B deux points du plan.
L'ensemble des points M du plan qui vérifient l'égalité $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration

Soit I le milieu de $[AB]$. D'après la propriété vue précédemment, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 &\iff MI^2-\frac{1}{4}AB^2=0\\ &\iff MI^2=\frac{1}{4}AB^2\\ &\iff MI=\frac{1}{2}AB\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 &\iff M \text{ appartient au cercle de centre } I \text{ et de rayon } \frac{AB}{2}\\ &\iff M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB].\end{aligned}$$

Méthode : Chercher un ensemble de points.

On considère deux points D et K tels que $DK=5$.
Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{MD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MK}}=\frac{11}{4}$.

Correction pdf

S'évaluer :

QCM n°8