Cours & méthodes

Suites arithmétiques et suites géométriques

9
ALGEBRE

1 Suites arithmétiques

1.1 Définition et premières applications : Niveau *

Définition : Suite arithmétique :

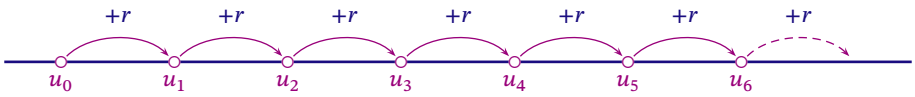
Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé la **raison** de la suite arithmétique.

Le cours en vidéo

Illustration



Remarque : Facile !

Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre r.

Attention

La raison d'une suite arithmétique est un réel fixé, il est indépendant de n.

Cas particulier

- La suite des nombres entiers naturels est une suite arithmétique de premier terme 0 est de raison 1.
- La suite des nombres pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2.

1.2 Premières méthodes élémentaires : Niveau *

Méthode : Calculer des termes d'une suite arithmétique

Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $r = -2$.
Calculer v_1, v_2, v_3

Correction PDF

Méthode : Déterminer si une suite est ou non arithmétique

Soit (v_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 5n + 10$.
Quelle est la nature de cette suite ?

Donner sa raison et son premier terme.

MathALEA

Méthode : Déterminer si une suite est ou non arithmétique

La suite (v_n) définie par : $v_n = n^2 + 9$ est-elle arithmétique ?

Correction PDF

S'évaluer

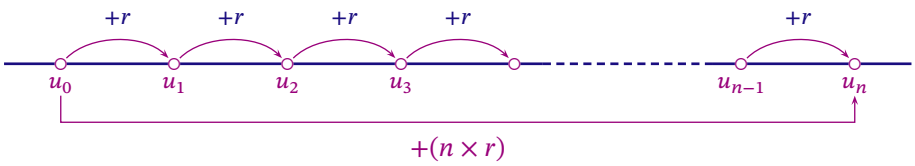
QCM n°1

1.3 Forme explicite : Niveau *

Propriété : Formule explicite : A connaître par cœur !!

Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 + nr$.

Illustration : Niveau **



Le cours en vidéo

Démonstration : Niveau **

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 :

$$u_1 = u_0 + r$$
$$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$$
$$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$$

On admet que cette propriété s'étend de proche en proche à tout entier n :

$$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$$

Démonstration en vidéo

Méthode : Déterminer la forme explicite d'une suite arithmétique. Niveau *

Soit (v_n) une suite arithmétique telle que $v_0 = 1$ et $r = 2$.
Exprimer v_n en fonction de n et en déduire v_{50}.

Correction PDF

Propriété : Fonction affine et suite arithmétique. Niveau *

Toute suite définie sous forme explicite par une fonction affine est une suite arithmétique.

Démonstration : Niveau **

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in N$ par $u_n = an + b$ avec a et b deux réels. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= a(n+1) + b - (an + b) \\ &= an + a + b - an - b \\ &= a \end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = a$, ce qui est équivalent à $u_{n+1} = u_n + a$
(u_n) est donc une suite arithmétique de raison $r = a$. Le premier terme est $u_0 = a \times 0 + b = b$

Remarque : Bien pratique !

Si une suite est définie sous forme explicite par une fonction affine, alors l'ordonnée à l'origine est logiquement le premier terme de la suite, le coefficient directeur la raison de la suite.
Ainsi, si $u_n = 3n - 2$, on reconnait immédiatement une suite arithmétique :
Premier terme $u_0 = -2$ et raison $r = 3$

Méthode : Reconnaître une suite arithmétique. Niveau *

Donner la nature de la suite (u_n) la suite définie pour tout $n \in N$ par $u_n = 4 - 3n$.

Correction PDF

1.4 Lien entre les termes :

Propriété : Niveau **

Si (u_n) une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Propriété : Niveau **

(u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n - u_p = (u_0 + nr) - (u_0 + pr) = (n-p)r$$

Remarque

Avec la raison et un terme quelconque d'une suite arithmétique, on détermine tous les termes de la suite.

Méthode : Utiliser les termes d'une suite arithmétique. Niveau **

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 4$ et $u_9 = 24$.
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
2) Exprimer u_n en fonction de n

Correction PDF

S'évaluer

QCM n°2

1.5 Variations

Propriété : Variations d'une suite arithmétique : Niveau *

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- La suite (u_n) est constante si, et seulement si, $r = 0$.
- La suite (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, $r > 0$.
- La suite (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, $r < 0$.

Démonstration en vidéo

Démonstration : Niveau *

(u_n) est une suite arithmétique de raison r donc pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$

- (u_n) est constante si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = 0 \iff r = 0$.
- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n > 0 \iff r > 0$.
- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n < 0 \iff r < 0$.

Remarque : Facile !!

Le sens de variation d'une suite arithmétique ne dépend que de sa raison.

Méthode : Utiliser les termes d'une suite arithmétique. Niveau *

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = u_n + 2$ et $u_0 = 11$.

Correction PDF

S'évaluer

QCM n°3

1.6 Somme de termes consécutifs

Propriété : Somme des premiers entiers consécutifs : Niveau *

Pour tout entier naturel n on a :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration détaillée en vidéo

Démonstration : Niveau *

On peut écrire la somme S des n premiers entiers naturels non nuls de deux manières :

$$S = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1$$

Par addition des deux lignes on obtient : $2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ termes}} = n(n+1)$

Méthode : Utiliser les termes d'une suite arithmétique. Niveau **

Calculer $S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 133$ puis $S_2 = 30 + 33 + 36 + \ldots + 264$

Correction PDF

Propriété : Cas général. Niveau **

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Démonstration détaillée en vidéo

Remarque : Par cœur !!

Une relation fondamentale à connaître absolument.

Démonstration : Niveau **

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

$$\begin{aligned} S &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_0 + nr) \\ &= (n+1)u_0 + (1 + 2 + \cdots + n) \times r \\ &= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} \times r \\ &= (n+1)\left(\frac{2u_0 + nr}{2}\right) \\ &= (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right) \end{aligned}$$

Remarque : Symbole Σ Niveau *

Pour écrire des sommes de termes, on utilise souvent la lettre grecque Sigma $\sum$.

Ainsi, on lit : $\sum_{i=1}^{i=3} u_i$ comme la somme, pour i allant de 1 à 3, des u_i.

$$\sum_{i=1}^{i=3} u_i = u_1 + u_2 + u_3.$$

On pourrait coder cela avec la boucle For en algorithmie

Méthode : Utiliser le symbole Σ. Niveau **

Soit une suite arithmétique (u_n) de raison 5 , telle que $u_0 = 2$.

n étant un nombre entier, on a : $\sum_{i=3}^{i=n} u_i = 6456$. Calculez n

Correction PDF

S'évaluer

QCM n°4

1.7 Représentation graphique

Propriété : Niveau *

La forme explicite d'une suite arithmétique étant de la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction affine, les points formés par sa représentations graphiques sont alignés.

Le cours en vidéo

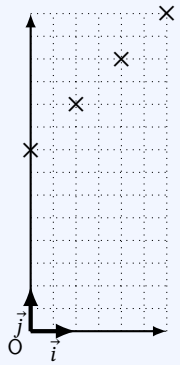
Définition : Évolution linéaire. Niveau *

Dans le cas d'une suite arithmétique, on parle d'une évolution **linéaire**

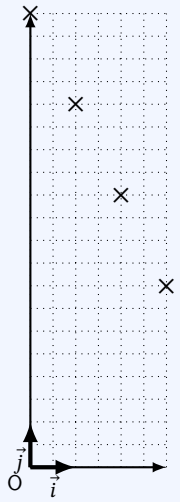
Exemple

Exemple 1 :
(u_n) est la suite arithmétique
de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 1.

Exemple 2 :
(v_n) est la suite arithmétique
de premier terme $v_0 = 10$ et de raison -2.



Exemple 1



Exemple 2

S'évaluer

QCM n°5

2 Suites géométriques

2.1 Définition et premières applications : Niveau *

Définition : Suite géométrique

Dire qu'une suite (u_n) est géométrique signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n,

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

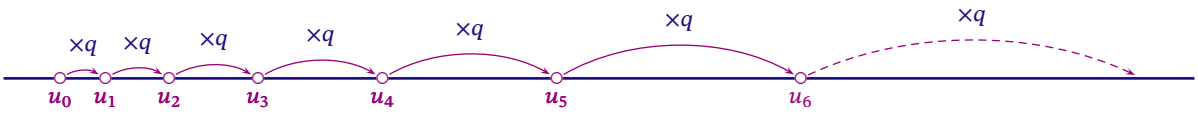
Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

Le cours en vidéo

Remarque : Important !!

La raison d'une suite géométrique est un réel indépendant de n.

Illustration



Remarque : Facile !

Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q.

Méthode : Calculer les premiers termes d'une suite géométrique. Niveau *

Soit la suite géométrique (v_n), de premier terme $v_0 = 10$ et de raison 0,2.
Calculer v_1 ; v_2 ; v_3

Correction PDF

Méthode : Déterminer si une suite est géométrique. Niveau **

Préciser si les suites suivantes, définies sur $\mathbb{N}$, sont géométriques.
Dans ce cas, indiquer alors la raison q et le premier terme.

1) $a_n = 5^{n+2}$
2) $b_n = \dfrac{-2}{3^{n+1}}$
3) $c_n = \dfrac{(-2)^{3n+1}}{3^{2n}}$
4) $d_n = n^2$
5) $e_n = 2^n$
6) $f_n = 2 \times 3^{-n}$

Correction en vidéo

S'évaluer

QCM n°6

2.2 Évolution en pourcentage : Niveau *

Rappels en vidéo

Propriété : Rappels de seconde :

- Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 + \dfrac{t}{100}$.
- Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 - \dfrac{t}{100}$.

Cours en vidéo

Remarque : Faut y penser !

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1+\frac{t}{100}$ (augmentation) ou $1-\frac{t}{100}$ (diminution)

Méthode : Associer suite géométrique et évolution en pourcentage.

Déterminer la suite correspondant à l'évolution d'un capital de 2000 € qui est placé au taux d'intérêt composé de 1 % par an.

Correction PDF

S'évaluer

QCM n°7

2.3 Relations entre les termes : Niveau **

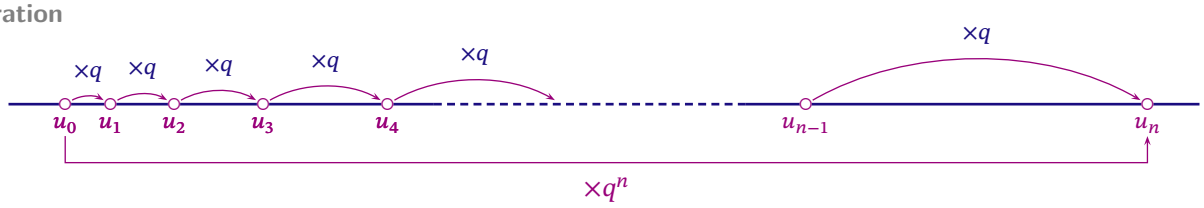
Propriété : Expression explicite : Niveau *

Le terme général d'une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 est

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Le cours en vidéo

Illustration



Démonstration : Niveau **

Ci-dessous, quelques éléments écrits de la démonstration mais la totalité du raisonnement est à voir en vidéo.

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 :

$$u_1 = u_0 \times q$$
$$u_2 = u_1 \times q = (u_0 \times q) \times q = u_0 \times q^2$$
$$u_3 = u_2 \times q = (u_0 + \times q^2) \times q = u_0 \times q^3$$

On admet que cette propriété s'étend de proche en proche à tout entier n :

$$u_n = u_{n-1} \times q = (u_0 \times q^{n-1}) \times q = u_0 \times q^n$$

Réciproquement, si la suite (u_n) est définie pour tout entier n par $u_n = a \times q^n$ où a et q sont des réels,
alors pour tout entier n, $u_{n+1} = a \times q^{n+1} = a \times q^n \times q = u_n \times q$

Démonstration en vidéo

Méthode : Utiliser la forme explicite d'une suite géométrique. Niveau *

Soit (u_n) une suite géométrique avec $u_0 = 3$ et $q = 2$. Déterminer u_{20}.

Correction PDF

2.4 Propriété

Propriété : Premier terme quelconque : Niveau **

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n et pour tout entier p,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Démonstration : Niveau **

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors pour tous entiers naturels n et p,

$$u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times q^p \times q^{n-p} = u_p \times q^{n-p}$$

Remarque : A quoi ça sert ?

Cette relation est utile lorsqu'une suite géométrique est définie à partir d'un certain rang ou lorsque l'on cherche la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes.

Méthode : Utiliser une suite géométrique définie par deux termes.

(u_n) est une suite géométrique telle que $u_6 = 2$ et $u_9 = \frac{1}{4}$.
Déterminer sa raison.

Correction PDF

S'évaluer

QCM n°8

2.5 Étude des variations d'une suite géométrique : Niveau **

Démonstration

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :

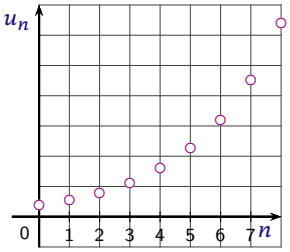
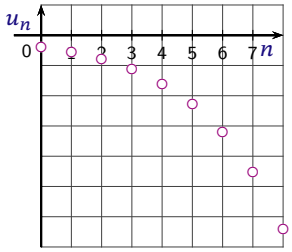
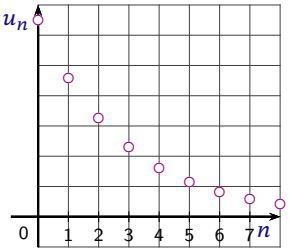
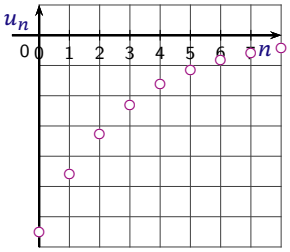
$u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n$

La monotonie de la suite dépend du signe de $u_0 \times q^n$ et $(q-1)$.

- Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.
- Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

Cours en vidéo

Tableau de synthèse des variations

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
			

Remarque : A retenir !!

Il faut bien comprendre que le sens de variation d'une suite géométrique dépend de **deux facteurs** :

- Le signe de son premier terme.
- La valeur de la raison .

Nous pouvons en déduire les deux propriétés suivantes :

Propriété : Variations de la suite q^n : Niveau **

Soit q un réel non nul.

- Si $q < 0$ alors la suite (q^n) n'est pas monotone.
- Si $q > 1$ alors la suite (q^n) est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (q^n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante.

Cours en vidéo

Propriété : Variations d'une suite géométrique : Niveau **

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul

- Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.
- Si $q > 0$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite (q^n).
- Si $q > 0$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite (q^n).

Remarque : Bilan des variations : Niveau **

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0.

- Pour $u_0 > 0$:
  - Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
  - Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Pour $u_0 < 0$:
  - Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
  - Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

2.6 Approche de la notion de limite d'une suite géométrique : : Niveau ***

Propriété : Limites de la suite (q^n) :***

- Si $q > 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $-1 < q < 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q < -1$: (q^n) : pas de limite.

Explications en vidéo

Remarque : Méthode pour une suite géométrique quelconque :***

Pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_0 \times q^n$

- Chercher la limite de q^n avec les résultat précédent.
- Tenir compte du signe de u_0.

S'évaluer

QCM n°9

Remarque : Hors programme !

Cette notion est formellement hors programme de 1ère où on ne doit approcher que la notion de limite sans en développer les outils.

2.7 Recherche d'un seuil à l'aide d'un algorithme : Niveau ***

Méthode : Utiliser un algorithme de seuil.***

Soit (r_n) la suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $r_0 = 50000$.
Compléter l'algorithme suivant qui détermine le plus petit entier k, tel que pour tout $n > k$, $r_n < 30000$.
Déterminer à la calculatrice la valeur de k.

$A \leftarrow$ ... ...
$I \leftarrow 0$
Tant que $A \geqslant$ ... ...
  $I \leftarrow I + 1$
  $A \leftarrow$ ... ...
Fin Tant que

Correction PDF

S'évaluer

QCM n°10

2.8 Somme de termes consécutifs : Niveau **

Somme des puissances successives : :

Propriété : Somme des puissances successives d'un réel quelconque : Niveau **

Soit $q \neq 1$ un réel et n un entier naturel.

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

.

Introduction
Activité en vidéo

Remarque : A retenir !

Cette relation est fondamentale. Il faut absolument la maîtriser.

Démonstration : Démonstration fondamentale !! : Niveau **

On pose $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$, d'où $qS = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}$
$S - qS = 1 - q^{n+1}$ soit $(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$.
Comme $q \neq 1$, on en déduit que $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Démonstration en vidéo

Cas particulier : Pour $q = 1$

Si $q = 1$, $S = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$, alors S est la somme de $n + 1$ termes égaux à 1 d'où $S = n + 1$.

Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique : : Niveau **

Propriété : Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Cours en vidéo

Remarque : Pour retenir ! : : Niveau **

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Démonstration : Démonstration Fondamentale : Niveau **

(u_n) est une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 donc

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \cdots u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right) \\ &= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

Démonstration en vidéo

Méthode : Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique. Niveau **

1) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = 2$. Calculer $u_0 + u_1 + ... + u_{10}$.
2) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 64$ et de raison $q = 0,5$. Calculer $u_1 + ... + u_{12}$.
3) Soit (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_5 = 5$ et de raison $q = 0,9$. Calculer $u_5 + u_6 + ... + u_{20}$.

Correction PDF

2.9 Représentation graphique d'une suite géométrique : Niveau *

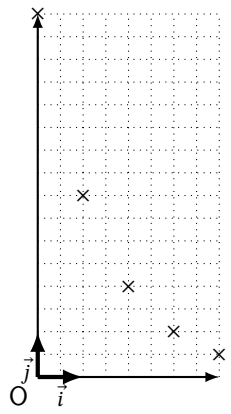
Définition : Évolution exponentielle
Dans le cas d'une suite géométrique, on parle d'une croissance (ou décroissance) **exponentielle**.

Cours en vidéo

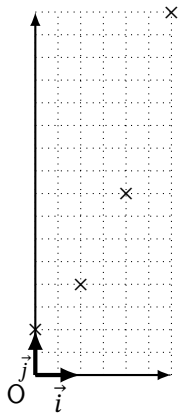
Exemple

Exemple 1 :
Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 8$

Exemple 2 :
Soit (u_n) la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$



Exemple 1



Exemple 2

3 Suites arithmético-géométriques : Niveau ***

Méthode : Résoudre un problème avec des suites arithmético-géométriques. Niveau ***
Exercice type Bac...

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 8 \end{cases}$

1) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.
2) (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 10$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
   c) En déduire la limite de (u_n) .

Correction vidéo