LES NOMBRES REELS

3

Plan de travail : Les ensembles de nombres.

Objectifs ♡ du chapitre

♡ Connaître les différents ensembles de nombres.

♡ Rédiger des démonstrations avec les ensembles de nombres.

Auto-évaluation :

Utilisez cette auto-évaluation pour vous tester avant le début du chapitre, en répondant par Vrai ou Faux :

2^3 est un entier naturel		$-3 \in \mathbb{N}$	
$3,5 \in \mathbb{D}$		$5 \in \mathbb{D}$	
$\mathbb{Z} \in \mathbb{D}$		$\frac{2}{3} \in \mathbb{D}$	
$\frac{2}{3} \subset \mathbb{D}$		Tout entier est un nombre rationnel.	
$\pi \in \mathbb{Q}$		$\sqrt{9}$ n'est pas un décimal.	

Correction
du Plan de travail

Le cours en PDF

Entraînement

Découverte du cours :

1 Dire, s'il existe, quel est le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants ?

- $A = -\sqrt{9}$
- $C = \dfrac{42,56}{5,32}$
- $E = \sqrt{1,21}$
- $B = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- $D = \dfrac{4\pi}{3\pi}$
- $F = \sqrt{-4}$

2 Quel est le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants ?

- $A = \dfrac{1}{2}$
- $C = \dfrac{10-4}{3}$
- $B = 2-5$
- $D = -\sqrt{16}$

3 Quel est le plus petit ensemble de nombres auquel appartient chacun des nombres suivants ?

- $A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$
- $C = \dfrac{91}{7}$
- $B = \sqrt{16} - \sqrt{25}$
- $D = \dfrac{34}{2} - \sqrt{289}$

4 Lesquels de ces nombres sont décimaux ?

- $A = -5$
- $B = \dfrac{3}{40}$
- $C = \dfrac{5}{7}$
- $D = \dfrac{40}{3}$

Applications :

5 Le professeur de mathématiques propose l'affirmation : "*Le produit de deux nombres irrationnels est toujours un nombre rationnel.*"
Simone répond : Vrai, par exemple, $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{N}$.
Raoul répond : Faux, par exemple, $\sqrt{5} \times \sqrt{2} \quad \mathbb{Z}$.
Quel élève a raison ?

6 Trouver deux nombres irrationnels différents dont le produit est un nombre irrationnel.

7 Trouver deux nombres irrationnels différents dont le produit est un nombre entier naturel.

8 Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est toujours vraie. Si elle est fausse, donner un contre exemple.

1) La différence de deux nombres entiers naturels est un entier naturel.
2) Le quotient de deux nombres décimaux est un nombre décimal.
3) Le quotient de deux nombres réels est un nombre rationnel.
4) Le produit d'un nombre rationnel par un nombre entier relatif est un nombre rationnel.

9 Répondre aux questions en justifiant les réponses :

1) La somme de deux irrationnels est-elle toujours un irrationnel ?
2) Le carré d'un irrationnel peut-il être un entier naturel ?
3) La racine carrée d'un entier peut-elle être un nombre relatif ?

Approfondissements :

10 Soit $x \in \mathbb{N}$. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est fausse ou toujours vraie.
Si elle est fausse, donner un contre-exemple et donner le plus petit ensemble qui la rende toujours vraie.

- $2x+1 \in \mathbb{N}$
- $3x-7 \in \mathbb{N}$
- $\dfrac{x+1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$
- $2x+1 \in Q$
- $\dfrac{x-6}{2} \in \mathbb{Z}$
- $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$

11 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1) Le quotient de deux nombres premiers distincts peut être un entier relatif.
2) Le quotient de deux nombres premiers distincts peut être un nombre décimal.

12 Trouver, quand cela est possible, un nombre x qui remplit les critères suivants :

1) $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{N}$
2) $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Q}$
3) $x \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Z}$
4) $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{R}$

13 On considère un cercle dont le périmètre est rationnel. Prouver que son diamètre est nécessairement irrationnel.

14 Quelle est la nature de $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$?

15 Démontrer que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas un décimal.

16 Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Un lien vers mathalea :

Chapitre N3

Plan de travail : Les ensembles de nombres.

1 1. Les racines carrées sont souvent des irrationnels (et donc la réponse est souvent $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels) mais lorsqu'il s'agit d'un carré parfait comme ici, c'est différent. Comme $\sqrt{9} = 3$ le nombre proposé est en fait -3. La réponse est donc $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.
2. Là, il n'a aucune subtilité. L'inverse d'un irrationnel est toujours un irrationnel. On peut le démontrer par l'absurde. Soit r un irrationnel. Sont inverse est $\frac{1}{r} = q$. Si q était un rationnel, alors $\frac{1}{q}$ en serait un aussi. Mais ce n'est pas le cas puisque $\frac{1}{q} = r$ (l'inverse de l'inverse de r est lui-même). r ne peut pas être à la fois rationnel et irrationnel. La réponse est $\mathbb{R}$.
3- La question suivante est facile si vous pouvez utiliser une calculatrice. Sinon... c'est facile aussi mais c'est plus long ! Si vous faites l'opération, vous trouvez 8 . Donc $\mathbb{N}$.
4- Lorsque π traîne dans les parages, le nombre est presque toujours un irrationnel. Mais ici, on le retrouve au numérateur et au dénominateur. Donc en simplifiant la fraction on obtient $\frac{4}{3}$ qui est un rationnel. La réponse est $\mathbb{Q}$.
5- Question-piège, surtout sans calculatrice. On pourrait penser que c'est un irrationnel (donc réponse $\mathbb{R}$) mais $\sqrt{1,21} = 1,1$. Donc c'est un décimal. En principe, vous devez connaître les premiers carrés, y compris celui de 11. Sachant que $11^2 = 121$ vous pouvez répondre à la question sans calculatrice.
6- La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas. Donc il n'y a pas de plus petit ensemble, ce nombre n'est même pas un réel !

2 $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$. De plus $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ 2. $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$. De plus $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ (cf démonstration racine 2). $\frac{10-4}{3} = 2 \in \mathbb{N}$ 4. $-\sqrt[3]{16} = -4 \in \mathbb{Z}$. De plus $-4 < 0$ donc $-4 \notin \mathbb{N}$

3
- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1 \in \mathbb{N}$
- $\frac{91}{7} = 13 \in \mathbb{N}$
- $\sqrt{16} - \sqrt{25} = 4 - 5 = -1 \in \mathbb{Z}$. De plus $-1 \notin \mathbb{N}$
- $\frac{34}{2} - \sqrt{289} = 0 \in \mathbb{N}$

4 1. $-5 = \frac{-5}{10^0}$ est décimal.
$5\overline{7}$ n'est pas décimal. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels 2. T n'est pas décimal. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in N$ tels que $\frac{5}{7} = \frac{a}{10^n}$. On a alors : $5 \times 10^n \quad a \times 7$. Or $7a$ est un multiple de 7 donc 5×10^n est un multiple de 7 ce qui est absurde car 7 est un nombre premier et ni 5 ni 10^n ne sont de multiples de 7 . Donc $\overline{7}$ n'est pas un nombre décimal.
3. $\frac{3}{40} = \frac{75}{1000}$ donc 40 est un nombre décimal.
4. 3 n'est pas décimal. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ $\frac{10}{3} - \frac{a}{10^n}$. On a alors : $40 \times 10^n = a \times 3.3a$ est un multiple de 3 donc 40×10^n tels que 3 $\quad 10^n$. On a alors : $40 \times 10^n = a \times 3.3a$ est un multiple de 3 donc 40×10^n doit être un multiple de 3 or la somme des chiffres de 40×10^n est 4 donc ce n'est pas un doit être un multiple de 3 or la somme des chiffres de 40×10^n est 4 donc ce n'est multiple de 3 . On a donc une contradiction. Donc $\frac{40}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

5 Simone a raison.
Pour démontrer que l'affirmation du professeur est fausse il a proposé un contre-exemple. Cela suffit à prouver que l'affirmation est fausse.
Par contre, Raoul avance un exemple particulier dans lequel l'affirmation du professeur est vraie, mais cela ne suffit pas à prouver que l'affirmation est toujours vraie.

6 $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels et leur produit $\sqrt{10}$ l'est aussi.

7 $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, donc $2\sqrt{2}$ est aussi un nombre irrationnel. Or $\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4 \in \mathbb{N}$

8 1. Faux : 5 et 7 sont des nombres entiers naturels mais. $5-7=-2$ n'est pas un nombre entier naturel.

2. Faux : $1=\dfrac{1}{10^0}$ et $3=\dfrac{3}{10^\mu}$ sont des nombres décimaux mais 3 n'est pas un nombre décimal.

3. Faux : $\sqrt{2}$ et 1 sont des nombres réels mais $\dfrac{\sqrt{2}}{1}-\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

4. Vrai : Soient $m=\dfrac{b}{b}$ un nombre rationnel où $b+0$ et $h\in\mathbb{Z}$ Par définition de $ma\in\mathbb{Z}$ et Ainsi, $hu\in\mathbb{Q}$, et ainsi : $m\times k-\dfrac{k\pi}{b}\in Q$

9 1- Non. Par exemple, la somme d'un irrationnel et de son opposé est égale à zéro (qui est un rationnel et même un entier naturel).

2- Oui. Par exemple, $\sqrt{2}^2=2$.

3- Oui, bien sûr. Par exemple, $\sqrt{16}=4$ et $4\in\mathbb{Z}$.

10 1. Vrai : si x est un entier naturel, alors son double $2x$ le sera aussi et de même pour $2x+1$.

2. Vrai : on a vu dans la question précédente que $x\in\mathbb{N}$. Or. N $\in$ donc $x\in$

3. Faux : si $x=2$, on a $3x-7=-1$ qui n'est pas un entier naturel. Mais $3x-7\in\mathbb{Z}$

4. Faux : si on prend $x=1$ on a $\dfrac{x-6}{2}=-2,5$.

Mais $\dfrac{x-6}{2}\in\mathbb{Q}$

4. Faux : si on prend $x=1$

6. Faux : $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Démonstration prochain chapitre.

11 1. Faux : Raisonnons par l'absurde.

Considérons deux nombres premiers distincts p et q tels $\underline{p}=k\in\mathbb{Z}$ que q On a alors $p=kq$. Or, p est un nombre premier donc la seule manière de l'écrire comme un produit de deux nombres entiers est $1\times p$. Donc, soit $q=1$ ce qui est absurde car 1 n'est pas premier, soit $k=1$ ce qui est absurde car alors $p=q$. Donc le quotient de deux nombres premiers distincts ne peut pas être un nombre entier naturel. De plus le quotient de deux nombres premiers est positif. Donc le quotient de deux nombres premiers distincts ne peut pas être un entier relatif.

2. Vrai : 2 et 5 sont des nombres premiers distincts et $\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{10}$ est un nombre décimal.

13 Le périmètre du cercle est rationnel.

Notons P ce périmètre et raisonnons par l'absurde.

Pour cela supposons que le le diamètre d est rationnel. On a $p=\pi\times d$. Donc $\pi=\frac{p}{d}$ or p et d sont rationnels.

Donc d est rationnel. Donc π est rationnel, ce qui est absurde.

Donc le diamètre du cercle ne peut pas être rationnel. Donc le diamètre du cercle est irrationnel.

14 $\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-1=3-1=2\in\mathbb{N}$

15 Voir le cours

16 Voir le cours