# Manipuler les nombres réels :

## 1. Calculer avec les fractions :

Le cours en vidéo

### I Introduction : Pourquoi étudier les opérations avec les fractions ?

#### Les entiers naturels :

En primaire, vous avez travaillé avec des nombres entiers. Les premières opérations étudiées (addition et multiplication) sont dîtes "stables" avec les entiers. Si on ajoute ou si on multiplie deux entiers naturels, on obtient un entier naturel.
Cet ensemble des entiers naturels, on peut l'écrire : $\{0; 1; 2; 3; \dots\}$ comme au collège, mais à partir du lycée, on lui donnera un nom : $\mathbb{N}$. Le chapitre 3 est consacré à ces nouvelles définitions.

#### Les entiers relatifs :

Avec la soustraction, on se rend compte que les entiers naturels ne suffisent plus pour toutes les opérations. Avec $3 - 2 = 1$ , la différence de deux entiers naturels reste un entier naturel mais la soustraction $2 - 3$ ne donne pas un entier naturel. La soustraction n'est donc pas stable avec $\mathbb{N}$.
Pour s'en sortir, il faut définir un nouvel ensemble, les entiers relatifs, qu'on va appeler : $\mathbb{Z}$.
Il contient tous les entiers naturels, et on rajoute tous leurs opposés : $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.
Vous avez appris à ajouter, soustraire et multiplier les entiers relatifs au collège.

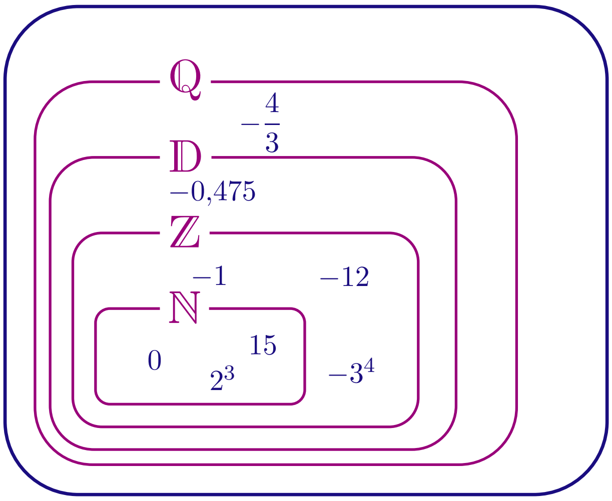
#### Les décimaux :

La difficulté suivante vient avec la division. Avec $2 \div 1 = 2$ , le quotient de deux entiers donne un entier.
Mais $1 \div 2$ ne donne pas un nombre entier.
Il a donc fallu créer une nouvelle famille de nombre, avec la numération décimale. On écrit : $1 \div 2 = 0{,}5$.
Ce nouvel ensemble des décimaux s'appelle $\mathbb{D}$.
Vous avez appris en primaire à gérer les quatre opérations avec les décimaux.

#### Les rationnels :

Mais les problèmes ne s'arrêtent pas là avec la division.
Car le quotient $1 \div 3$ ne donne pas un nombre décimal. La démonstration sera faîte dans le chapitre 3.
$1 \div 3 \approx 0{,}3333\dots$ mais il est impossible de trouver un décimal exactement égal à $1 \div 3$.
Ce nombre existe mais n'a pas d'écriture décimale. Comment s'en sortir ?
Inventer une nouvelle notation : $\dfrac{1}{3}$ et un nouvel ensemble qui contienne ces nombres. On appelle cet ensemble celui des rationnels, on le nomme : $\mathbb{Q}$.
L'objectif de ce chapitre est donc de vérifier que vous savez opérer avec des éléments de cet ensemble, c'est à dire vérifier que vous savez manipuler les fractions dans des calculs.

#### Illustration




**A suivre !**

Le chapitre 3 est entièrement consacré à ces ensembles. On définira avec rigueur ce qu'est un nombre décimal, on prouvera que $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal, ... Le chapitre poursuit même cette histoire avec les nombres qui ne s'écrivent pas sous forme de fraction. Vous devez en connaître au moins un qui est célèbre.
Mais pas question de spolier ici ce chapitre.
On reste focalisé dans ce chapitre sur les fractions.

## II Fractions égales

### 1 Fractions égales :

**Règle de calcul :**

On ne change pas la valeur d'une fraction
en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur
par même nombre non-nul.

**EXEMPLE :**

$$A = \frac{2}{7} = \frac{2\times 3}{7\times 3} = \frac{6}{21}$$

$$B = \frac{25}{40} = \frac{5\times 5}{5\times 8} = \frac{5}{8}$$

Cours
en vidéo

### 2 Fractions irréductibles :

**Définition :**

On appelle **fraction irréductible**, une fraction dont le dénominateur et le numérateur n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1.

**Exemple :**

$\frac{2}{7}$ est irréductible mais $\frac{21}{14}$ n'est pas irréductible, car 21 et 14 ont aussi 7 comme diviseur commun.

#### Approfondissement

**Définition :**

Deux entiers sont premiers entre eux,
si et seulement si leur Plus Grand Diviseur Commun (PGCD) est égal à 1.

**Exemple :**
Comme 5 et 8 n'ont pas d'autres diviseurs communs que 1, on a : $PGCD(5;8) = 1$
5 et 8 sont alors premiers entre-eux, donc $\frac{5}{8}$ est irréductible.

**Exemple :**
$PGCD(4;8) = 4$ donc 4 et 8 ne sont pas premiers entre-eux, donc $\frac{4}{8}$ n'est pas irréductible.

**Attention !**
Il ne faut pas confondre "**Nombre premier**"
et "**Nombres premiers entre-eux**".

**Rappel :**
On appelle **Nombre Premier**, tout entier strictement supérieur à 1, ne possédant que deux diviseurs, 1 et lui-même.

**Subtil !**
4 et 9 sont par exemple des nombres premiers entre-eux, puisque leur seul diviseur commun est 1.
mais ni 4, ni 9 ne sont des nombres premiers.

## III Somme et différence de fractions :

### 1 Fractions de même dénominateur :

**Règle de calcul :**
Pour calculer une somme ou une différence de deux fractions de même dénominateur, on opère les **numérateurs.**

**Exemple :**

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{7} - \frac{11}{7} \\ &= \frac{2-11}{7} \\ &= -\frac{9}{7} \end{aligned}$$

### 2 Cas général :

**Règle de calcul :**
Pour calculer une somme ou une différence de deux fractions :

- On les transforme pour les écrire avec le plus petit dénominateur commun.
- On opère alors les **numérateurs.**

**Exemple :**

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{9} - \frac{3}{5} \\ &= \frac{2\times 5}{9\times 5} - \frac{3\times 9}{5\times 9} \\ &= \frac{10}{45} - \frac{27}{45} \\ &= \frac{10-27}{45} \\ &= -\frac{17}{45} \end{aligned}$$

**Approfondissement :**
Le plus petit dénominateur commun se trouve en calculant le **Plus Petit Multiple Commun** des deux dénominateurs, qu'on appelle ppcm.
On peut écrire : $ppcm(9;5) = 9 \times 5 = 45$
mais attention $ppcm(4;10) = 20 \neq 4 \times 10$.
Le produit de deux entiers est un multiple commun des deux entiers mais ce n'est pas toujours le plus petit !

### Pour s'entraîner :

Énoncés en ligne et corrections en vidéos

## 3 Cas particulier des entiers :

**Règle de calcul :**

Pour ajouter ou soustraire un entier à une fraction,
il faut écrire l'entier sous forme de fraction.

**Approfondissement :**

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est inclus dans celui des rationnels $\mathbb{Q}$.
On le note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$
Tout nombre entier est donc un nombre rationnel.
On peut écrire : $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \mathbb{Q}$.
Attention, la réciproque est fausse !

**Notations**

On utilise le symbole $\in$ pour dire qu'un élément **appartient** à un ensemble.
On utilise $\subset$ pour dire qu'un ensemble est **inclus** dans un autre ensemble.

**Exemple :**

$$\begin{aligned} A &= 3 - \frac{2}{7} \\ &= \frac{3}{1} - \frac{2}{7} \\ &= \frac{3 \times 7}{1 \times 7} - \frac{2}{7} \\ &= \frac{21}{7} - \frac{2}{7} \\ &= \frac{21 - 2}{7} \\ &= \frac{19}{7} \end{aligned}$$

### Pour s'entraîner :

Énoncés en ligne et corrections en vidéos
somme/différence de fractions et d'entiers

Sommes/différences de fractions
avec Mathalea.

## 4 S'évaluer :

# IV Produit de fractions :

## 1 Propriété :

**Règle de calcul :**

Pour calculer un produit de deux fractions,
on multiplie **ensemble** les deux numérateurs
et **ensemble** les deux dénominateurs.

**Exemple :**

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{7} \times \frac{3}{11} \\ &= \frac{2 \times 3}{7 \times 11} \\ &= \frac{6}{77} \end{aligned}$$

### Pour s'entraîner :

Énoncés en ligne et corrections en vidéos produits simples de fractions.

Produits simples de fractions avec Mathalea.

## 2 Réfléchir avant de calculer :

**Astuce de calcul :**

En général, on essayera de simplifier les fractions **AVANT** d'opérer le produit :

- en utilisant des simplifications évidentes (exemple $A$).
- en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers (exemple $B$).

**Exemple A :**

$$\begin{aligned} A &= \frac{24}{36} \times \frac{72}{48} \\ &= \frac{24 \times 72}{36 \times 48} \\ &= \frac{24}{48} \times \frac{72}{36} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Exemple B :**

$$\begin{aligned} B &= \frac{24}{32} \times \frac{81}{48} \\ &= \frac{24 \times 32}{81 \times 48} \\ &= \frac{2^3 \times 3 \times 2^5}{3^4 \times 2^4 \times 3} \\ &= \frac{2^8 \times 3}{2^4 \times 3^5} \\ &= \frac{2^4}{3^4} \\ &= \frac{16}{81} \end{aligned}$$

### Pour s'entraîner :

Énoncés en ligne et corrections en vidéos produits complexes de fractions.

## 3 Gérer les signes :

**Règle de calcul :**

La règle des signes pour effectuer les produits et quotients, s'applique évidemment avec les fractions.
Le plus simple, est de déterminer en premier le signe du calcul, puis d'effectuer les produits/quotients sans les signes.

**Astuce de calcul :**

Si le nombre de facteurs négatifs d'un produit est impair, le résultat sera négatif.
Si le nombre de facteurs négatifs d'un produit est pair, le résultat sera positif.

**Exemple :**

$$\begin{aligned} A &= \frac{-4}{6} \times \frac{-12}{-10} \\ &= -\frac{4}{6} \times \frac{12}{10} \\ &= -\frac{2^2}{2 \times 3} \times \frac{2^2 \times 3}{2 \times 5} \\ &= -\frac{2^4 \times 3}{2^2 \times 3 \times 5} \\ &= -\frac{2^2}{5} \\ &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

### Pour s'entraîner :

Calculer : $\dfrac{\dfrac{7}{3}}{\dfrac{2}{11}}$ Correction en vidéo.

Produits de fractions avec des relatifs avec Mathalea.

### 4 S'évaluer :

**QCM 1**

## V Quotient de fractions :

### 1 Propriétés :

**Règle de calcul :**
Diviser par un nombre non-nul, c'est multiplier par son inverse.

**Exemple A :**

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{7} \div 3 \\ &= \frac{5}{7} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{7 \times 3} \\ &= \frac{5}{21} \end{aligned}$$

**Exemple B :**

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{3} \div \frac{3}{8} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{8}{3} \\ &= \frac{2 \times 8}{3 \times 3} \\ &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

### Pour s'entraîner :

Calculer : $\dfrac{\dfrac{7}{3}}{\dfrac{2}{11}}$ Correction en vidéo

Produits simples de fractions avec Mathalea.

Quotients de fractions avec des relatifs avec Mathalea

## 2 S'ÉVALUER :

**QCM à valider avec ses identifiants :**

## 3 PRIORITÉS DE CALCUL :

**Propriété :**
La multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction.

**Exemple A :**

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \div \frac{2}{9} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \times \frac{9}{2} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{7 \times 9}{3 \times 2} \\
&= \frac{2 \times 2}{3 \times 2} + \frac{7 \times 9}{3 \times 2} \\
&= \frac{4}{6} + \frac{63}{6} \\
&= \frac{67}{6}
\end{aligned}$$

**Exemple B :**

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\frac{7}{2} + \frac{2}{9}}{\frac{7}{2} - \frac{2}{9}} \\
&= \frac{\frac{7 \times 9}{2 \times 9} + \frac{2 \times 2}{9 \times 2}}{\frac{7 \times 9}{2 \times 9} - \frac{2 \times 2}{9 \times 2}} \\
&= \frac{\frac{63}{18} + \frac{4}{18}}{\frac{63}{18} - \frac{4}{18}} \\
&= \frac{\frac{67}{18}}{\frac{59}{18}} \\
&= \frac{67}{18} \times \frac{18}{59} \\
&= \frac{67}{59}
\end{aligned}$$

## 4 APPLICATIONS :

Calculer $A = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \div \frac{2}{9}$ Correction en vidéo

Énoncés en ligne et corrections en vidéos

## 5 S'ÉVALUER :

**QCM 1**

# VI POURCENTAGES ET FRACTIONS D'UN NOMBRE :

## 1 Fraction d'un nombre :

**Règle de calcul :**
Pour calculer la fraction d'un nombre, on multiplie ce nombre par la fraction.

**Exemple :**
Pour calculer les $\frac{2}{3}$ de 45 , on calcule : $\frac{2}{3} \times 45 = 30$

## 2 S'entraîner :

### Exercice 1

Raoul a bu $\frac{2}{5}$ des $\frac{3}{4}$ de litre de jus de pomme.
Quelle quantité a-t-il bu ?

Correction en vidéo

### Exercice 2

Calculer :
1. $\frac{4}{5}$ de $\frac{35}{9}$
2. Le tiers de quatre septièmes.

Correction en vidéo

## 3 Pourcentage

**Définition :**
Soit $p \geq 0$. Calculer $p$ % d'un nombre quelconque, c'est calculer ses $\frac{p}{100}$.

**Exemple :**
Pour calculer les 20 % de 45, on calcule : $\frac{20}{100} \times 45 = 9$

**Notation :**
On peut écrire que, pour tout $p \geq 0$ : $p\ \% = \frac{p}{100}$

**Exemple :**
$20\ \% = \frac{20}{100} = 0{,}20$

## VII Préparer l'évaluation :

Exercices corrigés en vidéos

Bilan avec Mathalea.