GÉOMÉTRIE

19

Les vecteurs avec des coordonnées

Le cours en vidéo

1. Coordonnées d'un vecteur :

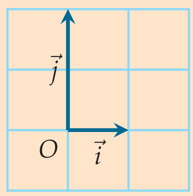
A. Rappels repères, coordonnées :

DÉFINITION : Repère orthogonal :

Soit deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et O point du plan.
On dit que $(O,\vec{i},\vec{j})$ forme **un repère orthogonal** du plan si :

- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.
- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ n'ont pas la même norme.

.

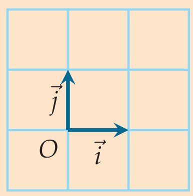


DÉFINITION : Repère orthonormé :

Soit deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et O point du plan.
On dit que $(O,\vec{i},\vec{j})$ forme **un repère orthonormé** du plan si :

- $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1$
- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.

.



S'ÉVALUER : QCM $n°1$

Note : . . . .

B. Lire les coordonnées d'un vecteur :

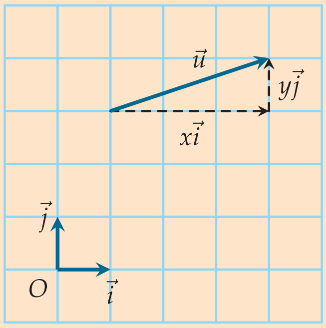
PROPRIÉTÉ : Coordonnées d'un vecteur

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, tout vecteur $\vec{u}$ se décompose de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

où x et y sont deux nombres réels.

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



Exemple

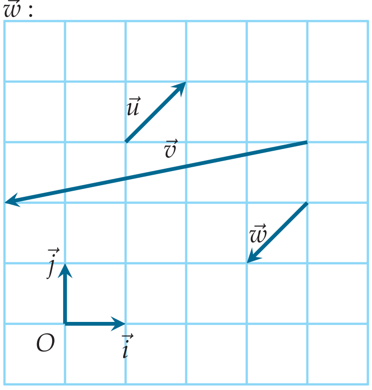
Dans notre exemple, on lirait $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

MÉTHODE 1 Lire les coordonnées d'un vecteur

On détermine les coordonnées d'un vecteur, en donnant son déplacement horizontal et vertical, exprimés avec les vecteurs de la base du repère.

Exercice d'application

Lire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:



Correction

S'ÉVALUER : QCM $n°2$

Note : ....

C. Construire un vecteur à partir de ses coordonnées

ATTENTION :

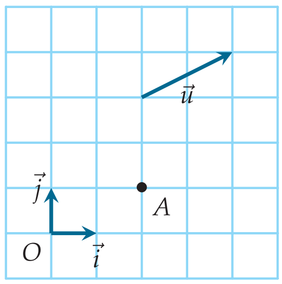
Il ne faut pas confondre les coordonnées d'un point et celles d'un vecteur. Elles ne représentent pas les mêmes objets :

- Un vecteur mesure un déplacement. Sur un repère on peut en construire autant de représentants que l'on veut.
- Un point est caractérisé par ses coordonnées, qui indiquent sa position par rapport à l'origine du repère. Un point de coordonnées définies est unique.

Pour bien distinguer les deux notions, on écrit souvent horizontalement les coordonnées de point $A(2\,;1)$ et verticalement celles d'un vecteur : $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

ILLUSTRATION :

- Le point de coordonnées $A(2\ ;1)$ est clairement placé dans un repère. Il est géolocalisé par ses coordonnées.
- Le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ne mesure qu'un déplacement, ici de deux unités horizontales vers la droite, et une verticale vers le haut. On peut tracer autant de représentants de ce vecteur dans un repère.

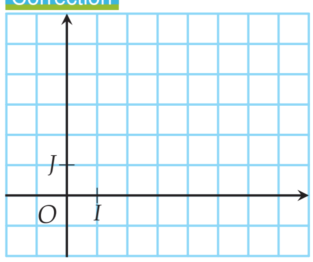


MÉTHODE 2 Construire un vecteur à partir de ses coordonnées

Exercice d'application

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, représenter le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$, ayant pour origine le point $A\,(-8;-5)$

Correction



Correction Mathalea

S'ÉVALUER : QCM $n°3$

Note : …………

D. Calculer les coordonnées d'un vecteur :

PROPRIÉTÉ

Dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$,
Si deux points A et B ont pour coordonnées respectives $A\,(x_A;y_A)$ et $B\,(x_B;y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

PREUVE Soit A, B et M de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ et $(x_M; y_M)$ dans un repère $(O; I, J)$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $OMBA$ est un parallélogramme.
Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont même milieu.

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{x_B + x_O}{2} \\ \dfrac{y_A + y_M}{2} = \dfrac{y_B + y_O}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_A + x_M = x_B \\ y_A + y_M = y_B \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$$

On en déduit que $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et finalement que $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

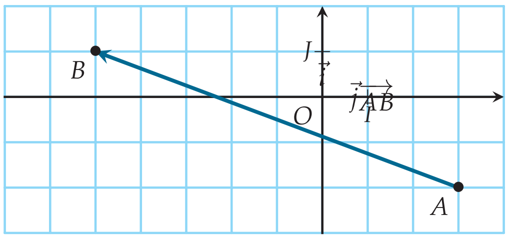
REMARQUE :
Ces coordonnées correspondent au déplacement horizontal puis vertical pour aller de A à B (affectés de signes).

Exemple
Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan,
on donne $A(3; -2)$ et $B(-5; 1)$:
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 - 3 \\ 1 - (-2) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$



MÉTHODE 3 Calculer les coordonnées d'un vecteur

Exercice d'application

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan,
on donne $A(3\,; -2)$ et $B(-5\,; 1)$.

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Correction

S'ÉVALUER : QCM $n°4$

Note : ....

E. Calculer la norme d'un vecteur

PROPRIÉTÉ : Calculer la norme d'un vecteur :

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur et un repère (O, I, J).

La norme du vecteur $\vec{u}$ est calculée avec la relation :

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

PREUVE La démonstration est la même que celle qui calcule la distance entre deux points, déjà travaillée et s'appuie sur le théorème de Pythagore.

MÉTHODE 4

Exercice d'application

Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

Correction

S'ÉVALUER : QCM $n°5$

Note : . . . .

2. Calculer avec les coordonnées de vecteurs

A. Somme de vecteurs

PROPRIÉTÉ

Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

Exemple

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Correction

On sait que si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$

Soit $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

On a alors : $\begin{cases} a &= 2-4 \\ b &= 1+3 \end{cases} \iff \begin{cases} a &= -2 \\ b &= 4 \end{cases}$

ce qui donne $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

MÉTHODE 5 **Repérer un point défini par une somme vectorielle**

Exercice d'application

Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on place les points :
$A(2;3)$,
$B(4;-1)$,
$C(5;3)$
et $D(-2;-1)$.
Quelles sont les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$?

Correction

S'ÉVALUER : QCM $n°6$

Note : . . . .

B. Multiplication par un réel

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et λ un réel.

La **multiplication de $\vec{u}$ par λ** est le vecteur $\lambda\vec{u}$ de coordonnées $\overrightarrow{\lambda u}\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Remarque : $\vec{u}$ et $\lambda\vec{u}$ ont la même direction. Leurs sens et leurs longueurs dépendent de λ.

Exemple

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} = 2 \times \vec{v}$

Correction

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. D'après la propriété ci-dessus, on a alors :

$$\vec{u} = 2 \times \vec{v} \iff \begin{cases} 4 = & 2 \times x \\ 2 = & 2 \times y \end{cases} \iff \begin{cases} x = & 2 \\ y = & 1 \end{cases}$$

Finalement $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

MÉTHODE 6

Exercice d'application

Soit dans un repère orthonormé (O, I, J), les points suivants :
$A(2;3)$,
$B(-1;1)$
et $C(3;-2)$.
Déterminer les coordonnées du point M vérifiant :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

Correction

S'ÉVALUER : QCM $n°7$

Note : . . . .

C. Vecteurs colinéaires

PROPRIÉTÉ : Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires,

$\iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$,

$\iff$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\begin{cases} x = \lambda x' \\ y = \lambda y'. \end{cases}$

MÉTHODE 7 Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires avec la définition.

Exercice d'application

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ils colinéaires ?

Correction

DÉFINITION

On appelle **déterminant** de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le nombre $xy' - x'y$.

On le note :

$$Det\,(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Exemple

Calculer le déterminant de vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$

On a :

$$Det\,(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}2 & -2\\-1 & 3\end{vmatrix} = 2\times 3-(-1)\times(-2) = 6-2 = 4$$

PROPRIÉTÉ : Colinéarité avec le déterminant.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Exemple

Déterminer si les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ sont colinéaires .

Correction

On calcule le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

On a :

$$\begin{aligned}Det\,(\vec{u};\vec{v}) &= \begin{vmatrix}3 & \frac{9}{2}\\-1 & -\frac{3}{2}\end{vmatrix}\\ &= 3\times\left(-\frac{3}{2}\right)-(-1)\times\frac{9}{2}\\ &= -\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

On en déduit, d'après la propriété de cours, que le vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

MÉTHODE 8

On calcule le déterminant des deux vecteurs. Seulement s'il est égal à 0, on peut conclure qu'ils sont colinéaires.

Exercice d'application

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ sont-ils des vecteurs colinéaires ?

Correction

PROPRIÉTÉ : Prouver l'alignement ou le parallélisme avec la colinéarité.

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

MÉTHODE 9 Prouver l'alignement avec le déterminant.

On utilise la propriété du déterminant pour vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice d'application

Soit dans un repère orthonormé (O, I, J), les points suivants :

- $A(1;2)$
- $B(3;1)$
- $C(5;3)$

sont-ils alignés ?

Correction

MÉTHODE 10 Prouver le parallélisme avec le déterminant.

La méthode est identique à la précédente.

Exercice d'application

Soit dans un repère orthonormé (O, I, J), les points suivants :

- $A(-1;3)$,
- $B(2;4)$
- $C(-2;-1)$
- $D(4;1)$.

Démontrer que $ABDC$ est un trapèze

Correction