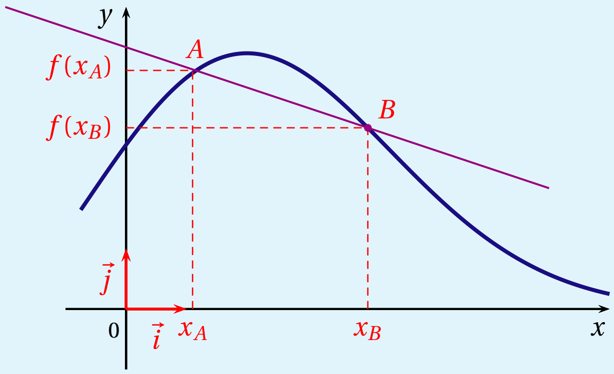
Nombre dérivé et équation de tangente

I Taux de variation

Pente d'une droite

Soit f une fonction définie sur I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On nomme $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points de $\mathscr{C}_f$



On sait que le coefficient directeur de la droite (AB) est donné par la relation :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Ce coefficient mesure la pente de la droite (AB).

Vidéo de cours

Traduction en langage de fonction :

Comme $y_B = f(x_B)$ et $y_A = f(x_A)$, en posant : $x_A = a$ et $x_B = b$, il vient :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On note ce coefficient, **taux de variation** de f entre a et b.
On le note :

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

τ se lit "tau"

Propriété

Le taux de variation de f entre a et b est le coefficient directeur de la droite (AB).

EXERCICE 1

On note f la fonction définie $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 6x + 7$.
Calculer le taux de variation de f entre 3 et -2.

S'ÉVALUER :

QCM 1

II Nombre dérivée

1 Introduction

Notion intuitive de tangente à une courbe :

On cherche maintenant à savoir ce qui se passe si on rapproche le point B vers le A jusqu'à ce quils se superposent.
On remarque que lorsqu'on rapproche B de A la droite (AB) se rapproche de la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point dabscisse a.
Lorsque B est très très proche de A alors la droite (AB) est confondue avec la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point dabscisse a.
Comment traduire cela de façon mathématiques ?

Vidéo de cours

Modélisation :

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point dabscisse a est le taux de variation de f entre a et b lorsque B se rapproche de A.
On note $b = a + h$, labscisse du point B.
Pour traduire que le point B est tout proche de A, on va donc dire que h tend vers 0. (car si h tend vers 0, alors $a + h$ tend vers a).
Il faut donc calculer le taux de variation de f entre $a + h$ et a lorsque h tend vers 0.
Or $\tau = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Propriété fondamentale :

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2 Définition :

Première définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.
Lorsque le rapport $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite réelle quand h tend vers 0 (avec $a + h$ restant dans I), on dit que la fonction f est dérivable en a et cette limite réelle, notée $f'(a)$, est appelée le nombre dérivé de f en a.
On note $f'(a)$ le nombre :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Vidéo de cours

Deuxième définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel appartenant à I.
Lorsque le rapport $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite réelle quand x tend vers a en restant dans I, on dit que la fonction f est dérivable en a et cette limite réelle, notée $f'(a)$, est appelée le nombre dérivé de f en a.
On note alors :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Méthode :

En pratique, quand on calculera le nombre dérivé d'une fonction, on utilisera plutôt la première définition :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Pour déterminer le nombre dérivé en 3 par exemple, on calculera le quotient $\frac{f(3+h) - f(3)}{h}$.
On essayera de simplifier et réduire l'expression.
Pour conclure, on observera l'évolution de cette quantité quand h devient très proche de 0, ce qui donnera la limite "quand h tend vers zéro".

EXERCICE 2

Soit $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
Calculer $f'(2)$

Correction :

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{h} \\ &= \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \frac{4h + h^2}{h} \\ &= 4 + h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 4 + h \\ &= 4 \end{aligned}$$

donc $f'(2) = 4$

EXERCICE 3

Soit $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
Calculer $g'(-1)$

Correction :

$$\begin{aligned} g'(-1) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(-1+h) - f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{-1+h} + 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{-1+h} + \frac{-1+h}{h}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{-1+h}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{-1+h} \times \frac{1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{-1+h} \\ &= -1 \end{aligned}$$

donc $g'(-1) = -1$

EXERCICE 4

Soit $h : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
Calculer $h'(3)$

Correction :

$$\begin{aligned} h'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{3+h} - \sqrt{3})(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(3+h) - (3)}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

donc $h'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Vidéo de cours

Vidéo de cours

Vidéo de cours

S'ÉVALUER :

QCM 2

III Tangente à une courbe

Propriété

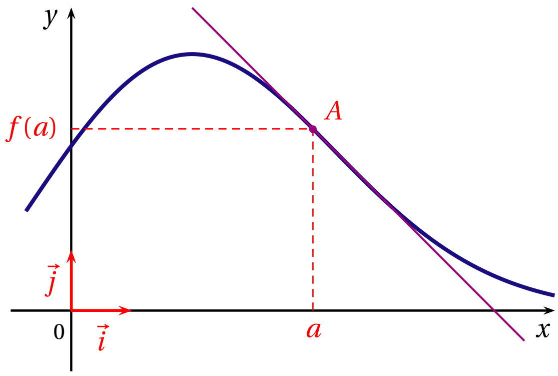
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Vidéo de cours

Démonstration de la détermination de l'équation de la tangente (démonstration fondamentale)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, dérivable en a où a est un réel de I, et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.
La droite (T) passant par le point $A\left(a; f(a)\right)$ de la courbe C_f et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a



On cherche à connaître l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ en a.
On sait que l'équation est de la forme $(T) : y = mx + p$ avec : $m = f'(a)$. Soit $M(x; y)$ un point de la tangente (T) et $A\left(a; f(a)\right)$ le point de la courbe d'abscisse a qui appartient aussi à la tangente (T).
On sait que $m = \dfrac{Y_M - Y_A}{X_M - X_A} = \dfrac{y - f(a)}{x - a}$
On a alors :

$$m = \frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Il vient avec un produit en croix que :

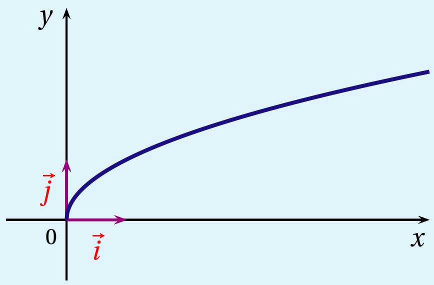
$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Ce n'est ni une équation réduite ni cartésienne de la tangente mais cette forme est assez pratique, donc on conserve cette forme pour l'équation de (T) est $(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Attention ! Tangente en a n'implique pas dérivable en a !

La courbe représentative d'une fonction f peut avoir une tangente en un point a sans que la fonction soit dérivable en a.

La courbe représentative de la fonction racine carrée est tangente à la droite d'équation $x = 0$ en 0.



Vidéo de cours

Or la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 en effet :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

ce n'est pas une limite finie donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Déterminer l'équation de (D) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0 = 2$.
en utilisant les résultats précédents : $f'(2) = 4$ et $f(2) = 2^2 = 4$

Vidéo de cours

Correction :
On sait que l'équation de la tangente à la courbe en a est donnée par la relation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

On applique avec $a = 2$, $f'(2) = 4$ et $f(2) = 2^2 = 4$
L'équation de (D) est

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2) + f(2) \\ &= 4(x-2)+4 \\ &= 4x-8+4 \\ &= 4x-4 \end{aligned}$$

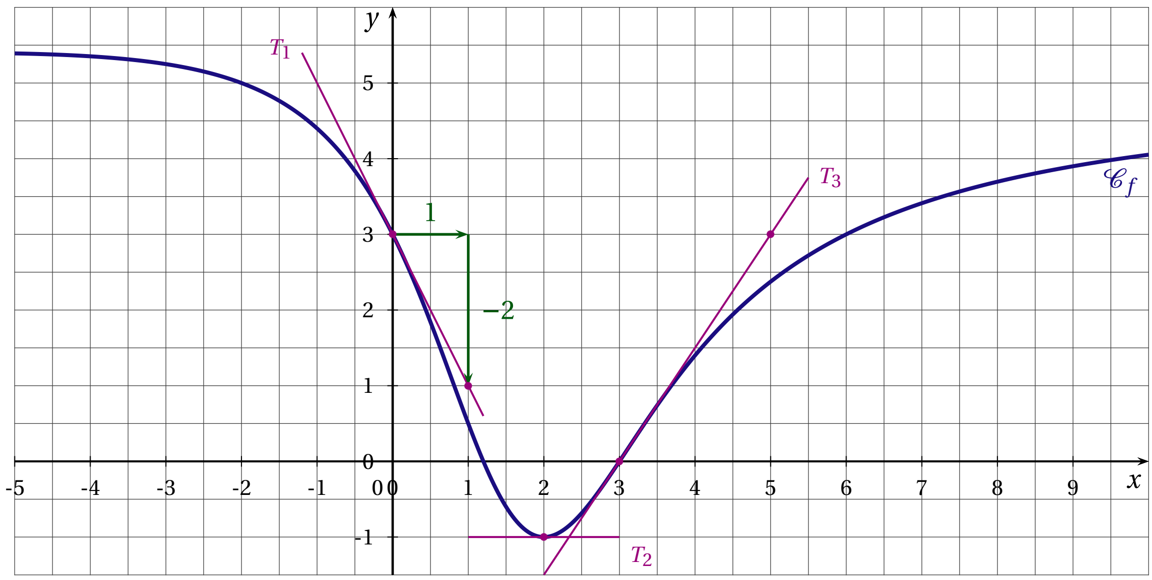
Finalement, (D) : $y = 4x - 4$

S'ÉVALUER :

QCM 3

EXERCICE 6

La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Vidéo de cours

Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.

Classico de chez classico !!

Ces questions de lectures graphiques sont un grand classique des évaluations de cours, mais aussi parfois de question BAC.
Vous devez absolument savoir les résoudre.

Correction :

1. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   Par lecture graphique, le coefficient directeur de la droite T_1 est égal à -2. Ainsi, $\boxed{f'(0) = -2}$
2. La tangente T_2 à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses. Donc $\boxed{f'(2) = 0}$
3. La droite T_3, tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 passe par les points de coordonnées $(3;0)$ et $(5;3)$. Son coefficient directeur a est
   $$a = \frac{3-0}{5-3} = \frac{3}{2}$$
   Le nombre dérivé $f'(3)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3. Donc $\boxed{f'(3) = \frac{3}{2}}$

S'ÉVALUER :

QCM 4