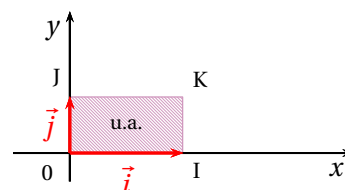


I INTÉGRALE ET AIRE : VIDÉO 1

1 UNITÉ D'AIRES

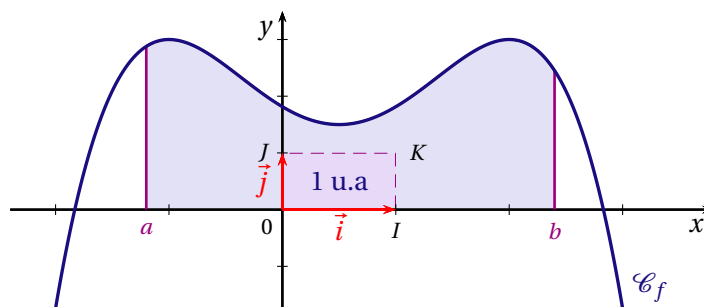
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.
 L'unité d'aire, notée u.a., est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec $I(0;1)$, $J(0;1)$ et $K(1;1)$.



2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$
 Ce nombre est noté : $\int_a^b f(x) dx$



REMARQUES

- $\int_a^b f(x) dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x) dx$ » ou encore « somme de a à b de $f(x) dx$ ».
- Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$.
- La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$
- $\int_a^a f(x) dx = 0$, car le domaine \mathcal{D}_f est alors réduit à un segment.

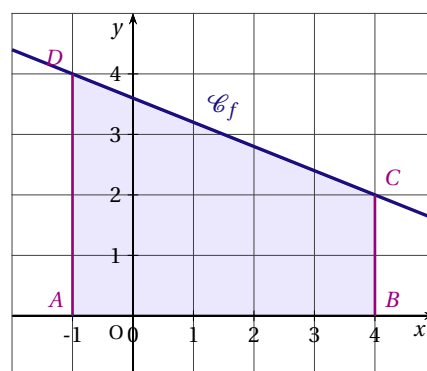
EXEMPLES : (vidéo 2)

Calculons $\int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx$.

La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0,4x + 3,6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1;4]$

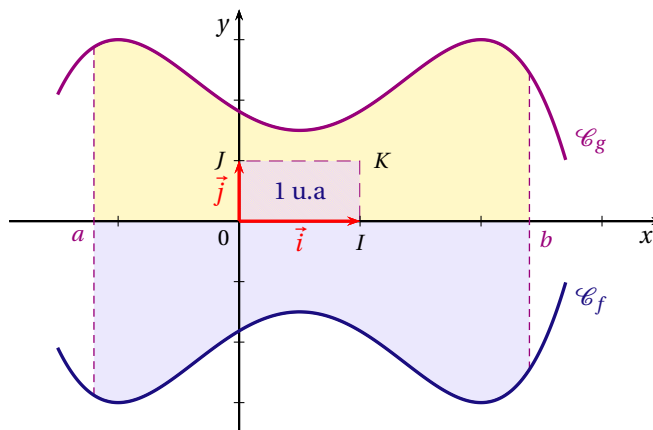
L'intégrale $\int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx$ est égale à l'aire du trapèze ABCD.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx &= \frac{(AD + BC) \times AB}{2} \\ &= \frac{(4 + 2) \times 5}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$



3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET NÉGATIVE : (VIDÉO 3)

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a; b]$ par $g = -f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.
 Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine \mathcal{D}_g compris entre la courbe \mathcal{C}_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire \mathcal{A} , exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D}_f compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}$$

4 FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE : (VIDÉO 4)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a; b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

THÉORÈME (admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.
 La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .

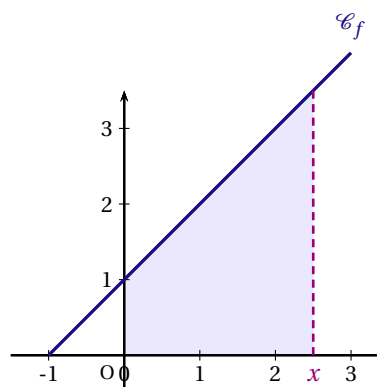
EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; 4]$ par $f(x) = x + 1$.
 Si x est un réel de l'intervalle $[0; 4]$, la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est égale à l'aire du trapèze colorié.

On rappelle (!!):

$$\mathcal{A}_{\text{trapèze}} = \frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$$

On a donc $F(x) = \frac{((x+1) + 1) \times x}{2} = \frac{x^2 + 2x}{2}$ La fonction F est dérivable sur $[0; 4]$ et $F'(x) = \left(\frac{x^2 + 2x}{2}\right)' = x + 1 = f(x)$.



II PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE : (VIDÉO 5)

1 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
 Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout réel x de I , $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLE

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5 - 3x$

La fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x$ est une primitive de f sur \mathbb{R} .

La fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x - 2$ est aussi une primitive de f sur \mathbb{R} .

De façon générale, toute fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x + c$, où c est un réel, est une primitive de f sur \mathbb{R} .

2 ENSEMBLE DES PRIMITIVES D'UNE FONCTION

PROPRIÉTÉ (*admise*)

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

THÉORÈME

Si F est une primitive de f sur un intervalle I , alors les primitives de f sur I sont les fonctions G définies pour tout réel x de I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel.

3 PRIMITIVE VÉRIFIANT UNE CONDITION

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I . Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque.
 Il existe une *unique* primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

EXEMPLE

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5 - 3x$.

Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(2) = 0$

On a montré que les primitives de f étaient sous la forme : $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x + c$

On veut que $F(2) = 0$ donc $-\frac{3}{2} \times 4 + 10 + c = 0 \iff c = -4$

D'où : $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x - 4$

III CALCUL DE PRIMITIVES

1 PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES (VIDÉO 6)

f est définie sur I par ...	Une primitive F est donnée par ...	Validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur \mathbb{R}
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	sur \mathbb{R}
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur \mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	sur $]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	sur \mathbb{R}

2 LINÉARITÉ (VIDÉO 7)

- Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et α un réel, alors αF est une primitive de αf sur I .

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - \frac{3}{x}$.

La fonction u définie par $u(x) = x^2$ admet comme primitive la fonction U définie par $U(x) = \frac{x^3}{3}$.

Sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet pour primitive la fonction $x \mapsto \ln x$. Donc sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction v définie par $v(x) = -\frac{3}{x}$ admet comme primitive la fonction V définie par $V(x) = -3 \ln x$.

Donc la fonction $f = u + v$ admet comme primitive la fonction $F = U + V$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3 \ln x$.

3 PRIMITIVES DES FORMES USUELLES (VIDÉO 8)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et u' sa dérivée.

Fonction f	Une primitive F est donnée par . .
$f = u' u$	$F = \frac{1}{2} u^2$
$f = u' u^n \quad n \text{ entier, } n > 0$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = u' e^u$	$F = e^u$
$f = \frac{u'}{u^2} \quad u \text{ ne s'annule pas sur } I$	$F = -\frac{1}{u}$

EXEMPLE (vidéo 9)

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x e^{1-x^2}$ telle que $F(1) = 0$.

Soit u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = 1 - x^2$ alors $u'(x) = -2x$.

On a : $f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x) \times e^{1-x^2}$ soit $f = -\frac{1}{2} \times u' e^u$.

Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F définie pour tout réel x , par $F(x) = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + c$ où c est un réel à déterminer.

Or $F(1) = 0 \iff -\frac{1}{2} + c = 0 \iff c = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la primitive de la fonction f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $F(x) = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} + \frac{1}{2}$.

IV INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

1 DÉFINITION (VIDÉO 10)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et F une primitive de la fonction f sur $[a; b]$.
 L'intégrale de f entre a et b est le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

REMARQUES

— La différence $F(b) - F(a)$ se note $\left[F(x) \right]_a^b$; ainsi $\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$.

— Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale.

En effet, si G est une autre primitive de f sur I , il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ d'où

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

— Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors l'intégrale $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

EXEMPLE

$$\begin{aligned} \int_1^e \left(x - \frac{1}{x} + \frac{e}{x^2} \right) dx &= \left[\frac{x^2}{2} - \ln(x) - \frac{e}{x} \right]_1^e \\ &= \left(\frac{e^2}{2} - \ln(e) - \frac{e}{e} \right) - \left(\frac{1^2}{2} - \ln(1) - \frac{e}{1} \right) \\ &= \frac{e^2}{2} + e - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

2 UTILISATION DE LA CALCULATRICE (VIDÉO 11)

Calculer une valeur approchée de : $\int_{0.5}^1 e^{-x^2} dx$

Méthode :

1. On représente graphiquement la fonction à l'écran, en choisissant bien une fenêtre adaptée aux bornes de l'intégrale.
2. On appuie sur *Gsolve*, touche *F5*
3. On sélectionne le triangle, touche *F6* pour élargir le menu.
4. On choisit la touche "intégrale", *F3*
5. On commence par entrer la borne inférieure, "lower".
6. Puis la borne supérieure, "upper".

La calculatrice affiche :

$$\int_{0.5}^1 e^{-x^2} dx \approx 0,29$$

3 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS (VIDÉO 12)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} . Pour tout réel a appartenant à I .

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Preuve :

Soit F une primitive de f sur I .

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} , a et b deux réels appartenant à I .

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Preuve :

Soit F une primitive de f sur I .

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b)$$

V PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

1 POSITIVITÉ (VIDÉO 13)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels appartenant à I .

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Attention la réciproque est fautive :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 (-x^2 + 3x + 1) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + x \right]_{-2}^3 \\ &= \left(-9 + \frac{27}{2} + 3 \right) - \left(\frac{8}{3} + 6 - 2 \right) = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Ainsi $\int_{-2}^3 f(x) dx \geq 0$ mais $f(-1) = -3$.

On démontre de manière analogue la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels appartenant à I .

Si $a \leq b$ et $f \leq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$.

2 LINÉARITÉ (VIDÉO 14)

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} . Pour tous réels a et b appartenant à I , et pour tout réel α

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

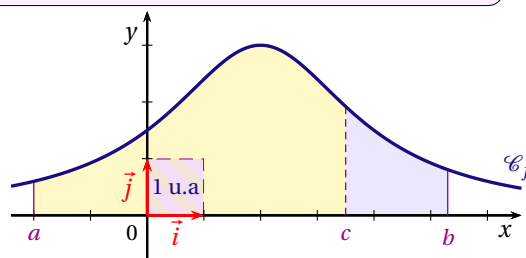
3 RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} . Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$.
L'aire du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ et du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = b$.



4 ORDRE (VIDÉO 15)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b deux réels appartenant à I tels que $a \leq b$.

Si pour tout réel x appartenant à $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

* DÉMONSTRATION

Si pour tout réel x appartenant à $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $f(x) - g(x) \leq 0$. Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$, la fonction $f - g$ est continue sur $[a; b]$.

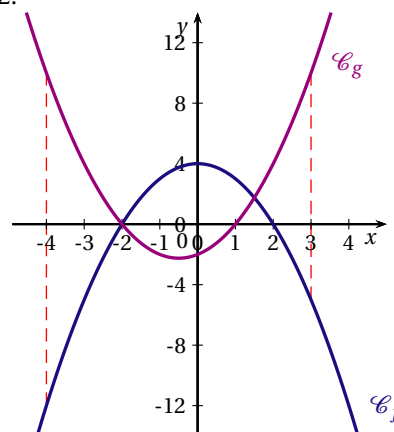
Par conséquent, si $a \leq b$ et $f - g \leq 0$ alors

$$\int_a^b (f - g)(x) dx \leq 0 \iff \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \leq 0$$

Attention la réciproque est fautive :

Considérons les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2 + x - 2$.

Ainsi, $\int_{-4}^3 f(x) dx \leq \int_{-4}^3 g(x) dx$
 mais nous ne pouvons pas conclure que sur l'intervalle $[-4;3]$, $f(x) \leq g(x)$ comme on peut le constater sur le graphique ci-contre.



VI INTÉGRALE ET MOYENNE

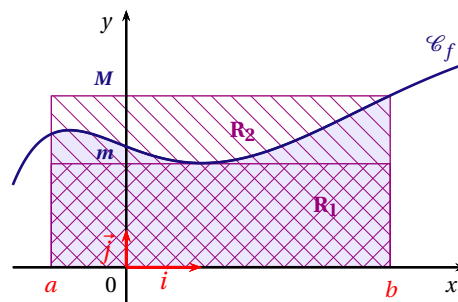
1 INÉGALITÉS DE LA MOYENNE (VIDÉO 16)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} ($a < b$). Soit m et M deux réels. Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m \times (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \times (b - a)$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$
 L'aire du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est comprise entre les aires des rectangles R_1 et R_2 :
 R_1 de côtés m et $b - a$;
 R_2 de côtés M et $b - a$.



2 VALEUR MOYENNE

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ de \mathbb{R} ($a < b$).

On appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$ le réel $\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$
 L'aire du domaine compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b - a$.

