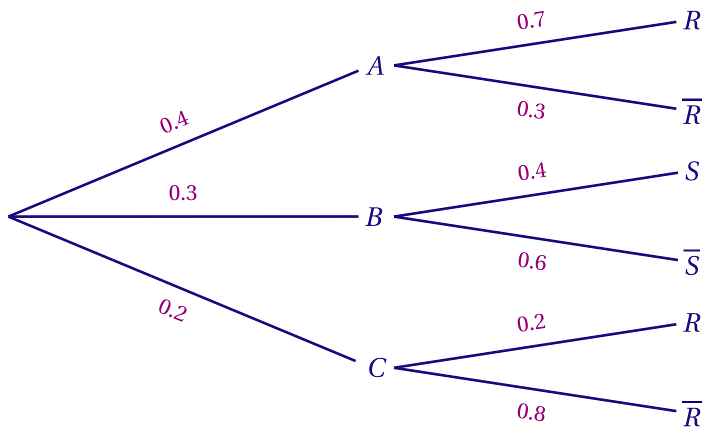
I Représentation sous forme d'un arbre pondéré (Vidéo 1)

Quand on réalise plusieurs expériences aléatoires, on peut modéliser la situation par un arbre pondéré, dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.

Exemple :
On propose une expérience aléatoire représentée par cet arbre pondéré :



Tirages successifs :

Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des évènements qui le composent.

Exemple :
L'événement qui se compose de A au premier tirage et de R au deuxième est noté $A \cap R$.

Règles de calculs dans un arbre pondéré :

— La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

— La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.

— La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet évènement.

Exemple :

— Au premier nœud, on a bien $\dfrac{6}{11}+\dfrac{3}{11}+\dfrac{2}{11}=1$

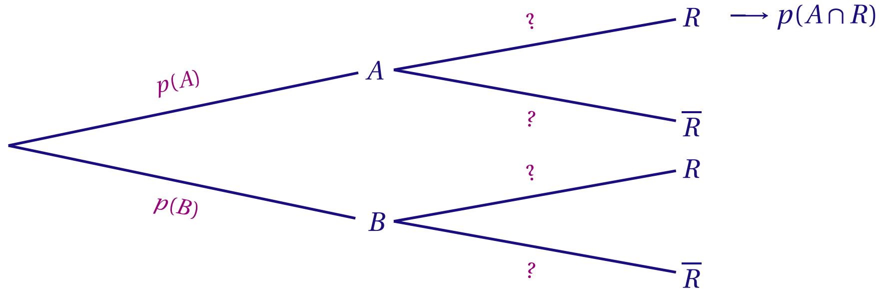
— $p(A\cap R)=0.4\times 0.7=0.28$

— La probabilité d'avoir R est égale à :
$p=p(A\cap R)+p(C\cap R)=0.4\times 0.7+0.2\times 0.8=0.44$

II probabilités conditionnelles : Vidéo 2

1 Introduction :

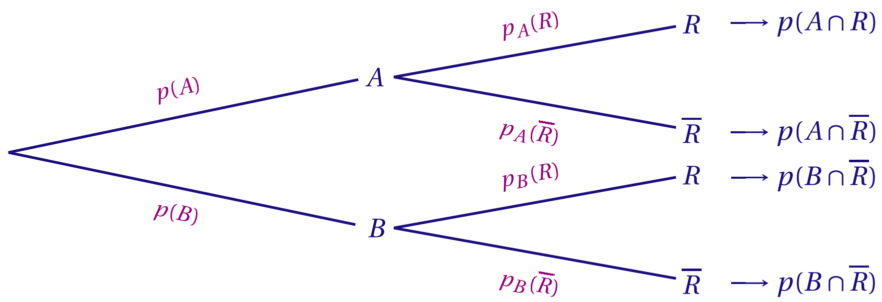
Dans l'arbre pondéré ci-dessous, on peut lire sur les premières branches de l'arbre : $p(A)$ et $p(B)$
On a défini que l'événement A puis R se nomme $A\cap R$ ainsi que sa probabilité : $p(A\cap R)$



Comment nommer la probabilité de la branche de second niveau, qui va de A à R ?
On ne peut pas la nommer $p(R)$ car cela serait ambigu avec la branche issue de B rejoignant R.
Pour distinguer ces deux événements, on doit faire référence à l'issue du premier tirage : A ou B.
On distingue alors l'événement **R sachant A** de l'événement **R sachant B**.

On note alors : $\boldsymbol{p_A(R)}$ l'événement R sachant A et $\boldsymbol{p_B(R)}$ l'événement R sachant B.

On obtient alors cet arbre :



2 DÉFINITION

Soient A et B deux évènements d'un même univers tel que $p(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé se note $p_A(B)$ et on a :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

- Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
- Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé.
- Attention de bien distinguer l'événement $A \cap B$ de l'événement B sachant A.

Remarque :
Si $p(B) \neq 0$ on définit de même $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

III FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES : VIDÉO 3

1 CAS DE DEUX ÉVÈNEMENTS

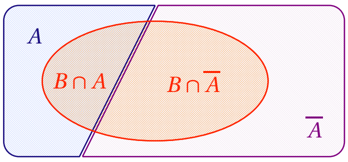
Si A est un évènement de Ω tel que $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$$

Preuve :

Les évènements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont incompatibles et $B = (A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$ d'où

$$p(B) = p\,(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$$



2 PARTITION

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un ensemble d'évènements de probabilités non nulles d'un même univers Ω.
$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ forment une partition de l'univers Ω si, et seulement si, tout évènement élémentaire de Ω appartient à l'un des évènements A_i et à un seul. C'est à dire si, et seulement si,

1. Pour tous entiers i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.
2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

Remarques :

— Les évènements qui se trouvent aux extrémités des branches issues d'un même nœud forment une partition de l'évènement situé à ce nœud.
Exemple :
Dans l'arbre pondéré précédent, $\{A,B,C\}$ forme une partition de l'univers Ω et $\{S,\overline{S}\}$ est une partition de l'évènement B.

— Un évènement A de probabilité non nulle et son évènement contraire $\overline{A}$ forment une partition de Ω.

— Si les évènements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forment une partition de Ω alors $p\,(A_1) + p\,(A_2) + \cdots + p\,(A_n) = 1$

3 FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est une partition de Ω alors pour tout évènement B de Ω,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$$

Exemple :
Le parc informatique d'une entreprise est constitué d'ordinateurs de marques A, B ou C référencés au service de maintenance.

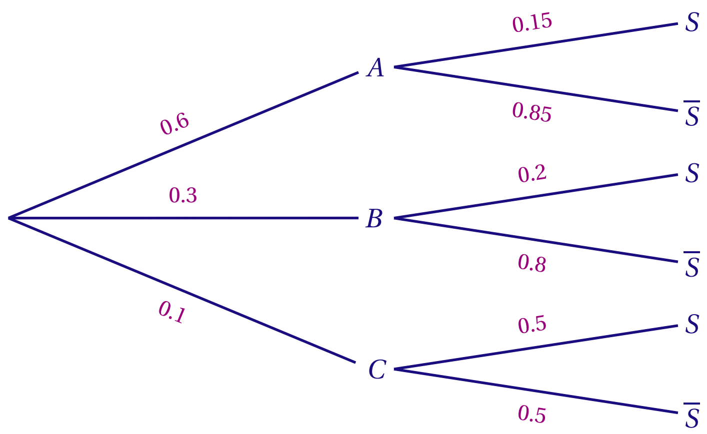
— 60% des ordinateurs sont de la marque A et parmi ceux-ci, 15 % sont des portables.

— 30 % des ordinateurs sont de la marque B et 20 % d'entre eux sont des portables.

— Les autres ordinateurs sont de la marque C et 50 % d'entre eux sont des portables.

On consulte au hasard la fiche d'un ordinateur, quelle est la probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable ?
Notons S l'évènement : « la fiche est celle d'un ordinateur portable »

On peut représenter la situation par un arbre pondéré :



Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(A\cap S)+p(B\cap S)+p(C\cap S) \\ &= 0{,}15\times 0{,}6+0{,}2\times 0{,}3+0{,}5\times 0{,}1 = 0{,}2 \end{aligned}$$

La probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable est 0,2.

IV Formule des probabilités composées : Vidéo 4

La relation définissant la probabilité conditionnelle peut s'écrire de la manière suivante

$$p\,(A\cap B) = p_A(B)\times p(A)$$

Cette écriture s'appelle la *formule des probabilités composées*

Soient A et B deux évènements d'un même univers tels que $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$. Alors :

$$p\,(A\cap B) = p_A(B)\times p(A) = p_B(A)\times p(B)$$

EXEMPLE

85 % d'une population est vaccinée contre une maladie. On a constaté que 2% des individus vaccinés n'ont pas été immunisés contre cette maladie.
Quelle est la probabilité qu'un individu soit vacciné et malade ?
Soit V l'évènement : « Un individu est vacciné » et M l'évènement : « Un individu est malade » ;
Nous avons $p(V) = 0{,}85$ et $p_V(M) = 0{,}02$.
La probabilité que parmi cette population, une personne soit vaccinée et malade est :

$$p\,(V\cap M) = 0{,}02\times 0{,}85 = 0{,}017$$

V Evènements indépendants : vidéo 5

1 INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Dire que deux évènements évènements A et B sont indépendants signifie que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Dire que deux évènements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'évènement de l'autre.

2 PROPRIÉTÉ

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ on a les équivalences :

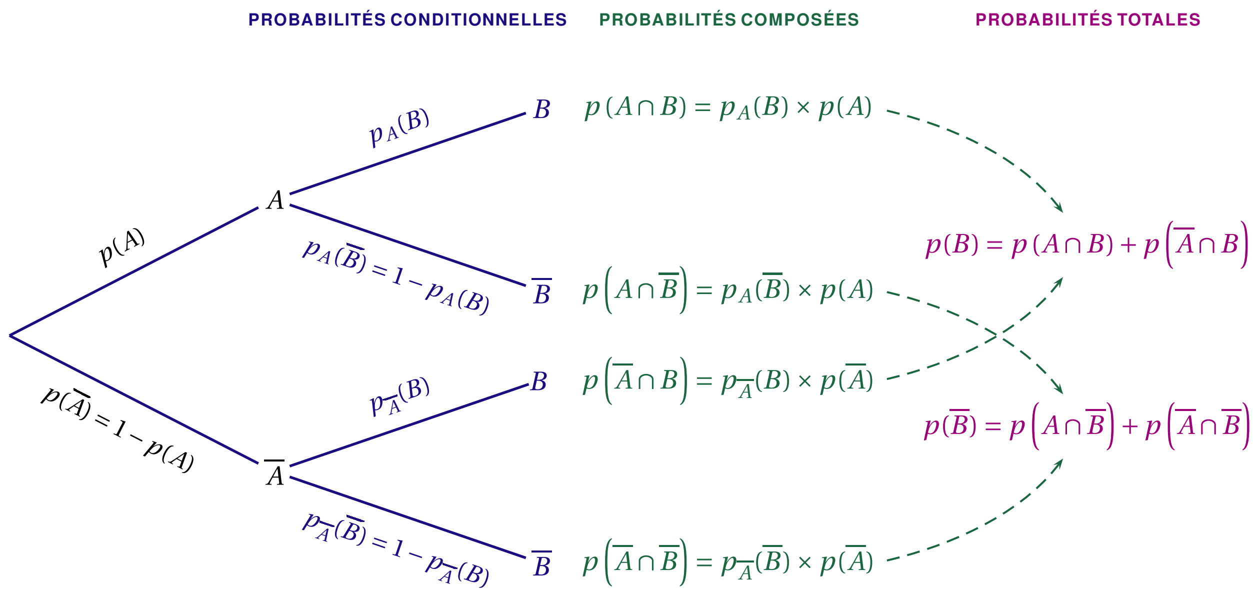
$$A \text{ et } B \text{ indépendants } \Leftrightarrow p_B(A) = p(A) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$$

Preuve :

Si $p(A) \neq 0$, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. Ainsi, A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$p(A) \times p(B) = p(A) \times p_A(B) \Leftrightarrow p(B) = p_A(B)$$

SYNTHÈSE : VIDÉO 6



EXERCICE DE SYNTHÈSE : VIDÉO 7

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

— 13,5 % des bovins d'un troupeau sont malades et ont réagi au test ;
— 1,5 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test ;
— 84,8 % des bêtes n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.
2. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.

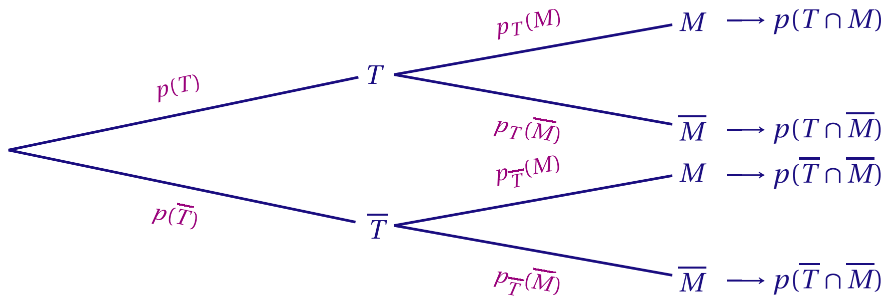
Correction :

On définit deux événements :

— T l'événement :"Le bovin a réagi au test".

— M l'évènement :"Le bovin est malade".

On note $\overline{T}$ et $\overline{M}$ les évènements contraires de T et M. On déduit de l'énoncé l'arbre pondéré suivant :



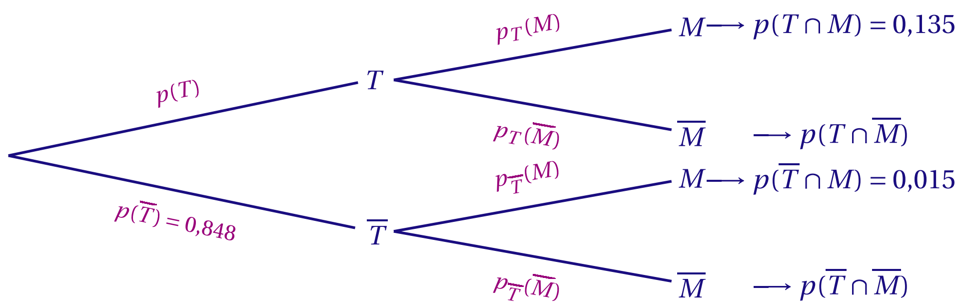
D'après l'énoncé :

— 13,5 % des bovins d'un troupeau sont malades et ont réagi au test donc $p(M \cap T) = 0{,}135$

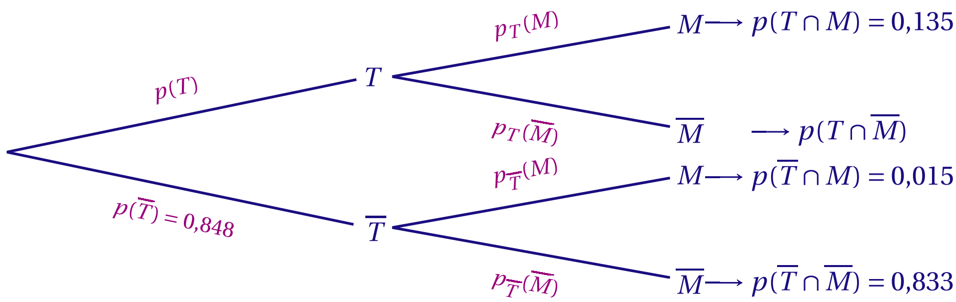
— 1,5 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test donc $p(M \cap \overline{T}) = 0{,}015$

— 84,8 % des bêtes n'ont pas réagi au test donc $p(\overline{T}) = 0{,}848$

On obtient donc :



1. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.
   On doit calculer : $p_{\overline{T}}(\overline{M})$
   M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers, donc :
   $$p(\overline{T} \cap \overline{M}) + p(\overline{T} \cap M) = p(\overline{T})$$
   donc : $p(\overline{T} \cap \overline{M}) = p(\overline{T}) - p(\overline{T} \cap M) = 0{,}848 - 0{,}015 = 0{,}833$
   On sait d'après le cours que :
   $$p_{\overline{T}}(\overline{M}) = \frac{p(\overline{T} \cap \overline{M})}{p(\overline{T})} = \frac{0{,}833}{0{,}848} \approx 0{,}98$$
   La probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif est de 0,98 environ.



2. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
   On doit calculer : $p_{\overline{M}}(\overline{T})$
   On sait d'après le cours que :
$$p_{\overline{M}}(\overline{T}) = \frac{p(\overline{T}\cap\overline{M})}{p(\overline{M})} = \frac{0{,}833}{p(\overline{M})}$$
   Il nous faut calculer : $p(\overline{M})$:
   T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc :
$$p(\overline{M}\cap\overline{T}) + p(\overline{M}\cap T) = p(\overline{M})$$
   On a trouvé : $p(\overline{M}\cap\overline{T})$ =0,833.

   Il nous faut calculer : $p(\overline{M}\cap T)$:

   Comme
$$p(\overline{M}\cap T + p(M\cap T) + p(\overline{T}\cap M + p(\overline{M}\cap\overline{T}) = 1$$
   On en déduit que : $p(\overline{M}\cap T) = 1 - 0{,}135 - 1{,}015 - 0{,}833 = 0{,}017$

   Il vient alors : $p(\overline{M}) = p(\overline{M}\cap\overline{T}) + p(\overline{M}\cap T) = 0{,}833 + 0{,}017 = 0{,}85$

   Au final : $p_{\overline{M}}(\overline{T}) = \dfrac{p(\overline{T}\cap\overline{M})}{p(\overline{M})} = \dfrac{0{,}833}{0{,}85} = 0{,}98$
   La probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade est de 0,98.