

EX
1

1.
 - a. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 2 744.
 - b. En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de $2\,744^2$.
 - c. À l'aide de cette décomposition, trouver x tel que $x^3 = 2\,744^2$.
2. Soient a et b deux nombres entiers supérieurs à 2 tels que $a^3 = b^2$.
 - a. Calculer b lorsque $a = 100$.
 - b. Déterminer deux nombres entiers a et b supérieurs à 2 et inférieurs à 10 qui vérifient l'égalité $a^3 = b^2$.

EX
2

Le capitaine d'un navire possède un trésor constitué de 69 diamants, 1 150 perles et 4 140 pièces d'or.

1. Décomposer 69; 1 150 et 4 140 en produits de facteurs premiers.
2. Le capitaine partage équitablement le trésor entre les marins.
Combien y-a-t-il de marins sachant que toutes les pièces, perles et diamants ont été distribués?

EX
3

1. Le nombre 588 peut se décomposer sous la forme $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$.
Quels sont ses diviseurs premiers, c'est-à-dire les nombres qui sont à la fois des nombres premiers et des diviseurs de 588?
2.
 - a. Déterminer la décomposition en facteurs premiers de 27 000 000.
 - b. Quels sont ses diviseurs premiers?
3. Déterminer le plus petit nombre entier positif impair qui admet trois diviseurs premiers différents. Expliquer votre raisonnement.

EX
4

Dans un laboratoire A, pour tester le vaccin contre la grippe de la saison hivernale prochaine, on a injecté la même souche de virus à 5 groupes comportant 29 souris chacun.

3 de ces groupes avaient été préalablement vaccinés contre ce virus.

Quelques jours plus tard, on remarque que :

- dans les 3 groupes de souris vaccinées, aucune souris n'est malade;
- dans chacun des groupes de souris non vaccinées, 23 souris ont développé la maladie.

1. a. En détaillant les calculs, montrer que la proportion de souris malades lors de ce test est $\frac{46}{145}$.

b. Justifier sans utiliser la calculatrice pourquoi on ne peut pas simplifier cette fraction.

Donnée utile Le début de la liste ordonnée des nombres premiers est :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Dans un laboratoire B on informe que $\frac{140}{870}$ des souris ont été malades.

2. a. Décomposer 140 et 870 en produit de nombres premiers.

b. En déduire la forme irréductible de la proportion de souris malades dans le laboratoire B.

Corrections

EX
1

1. a. 2 744 est multiple de 4 : $2\,744 = 4 \times 686 = 4 \times 2 \times 343$.
Or $343 = 350 - 7 = 7 \times 50 - 7 \times 1 = 7 \times 49 = 7 \times 7 \times 7$.
Donc $2\,744 = 2^3 \times 7^3$.
- b. Le résultat précédent entraîne :
 $2\,744^2 = (2^3 \times 7^3)^2 = (2^3)^2 \times (7^3)^2 = 2^6 \times 7^6$.
- c. Inversement le résultat précédent peut s'écrire :
 $2\,744^2 = 2^6 \times 7^6 = (2^2)^3 \times (7^2)^3 = (2^2 \times 7^2)^3 = (4 \times 49)^3 = 196^3$.
2. a. On a donc $100^3 = b^2$ ou $1\,000\,000 = b^2$, d'où $b = 1\,000$.
- b. — Si $a = 3$, $a^3 = 27$ qui n'est pas un carré ;
— Si $a = 4$, $a^3 = 64$ qui est le carré de 8 ;
— Si $a = 5$, $a^3 = 125$ qui n'est pas un carré ;
— Si $a = 6$, $a^3 = 216$ qui n'est pas un carré ;
— Si $a = 7$, $a^3 = 343$ qui n'est pas un carré ;
— Si $a = 8$, $a^3 = 512$ qui n'est pas un carré ;
— Si $a = 9$, $a^3 = 729$ qui est le carré de 27, mais $27 > 10$.
Il y a donc une solution : $4^3 = 8^2$.

EX
2

1. On a $69 = 3 \times 23$,
 $1\,150 = 115 \times 10 = 5 \times 23 \times 2 \times 5 = 2 \times 5^2 \times 23$, et
 $4\,140 = 414 \times 10 = 6 \times 69 \times 10 = 2 \times 3 \times 3 \times 23 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23$.
La liste des nombres premiers commence par :
 $2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19 - 23 - 29 \dots$
2. Le nombre de marins doit diviser 69, 1 150 et 4 140.
Seul le facteur 23 est commun aux trois décompositions.
Il y a donc 23 marins.

EX
3

1. Le nombre 588 peut se décomposer sous la forme $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$.
Les diviseurs premiers de 588 sont 2; 3 et 7.
2.
 - a. $27\,000\,000 = 27 \times 1\,000\,000 = 3^3 \times 10^6 = 3^3 \times (2 \times 5)^6 = 3^3 \times 2^6 \times 5^6 = 2^6 \times 3^3 \times 5^6$.
 - b. Les diviseurs premiers de 27 000 000 sont 2; 3 et 5
3. Les premiers nombres impairs premiers sont 3; 5 et 7, donc le plus petit entier impair admettant trois diviseurs premiers différents est $3 \times 5 \times 7 = 105$.

EX
4

Dans un laboratoire A, pour tester le vaccin contre la grippe de la saison hivernale prochaine, on a injecté la même souche de virus à 5 groupes comportant 29 souris chacun.

3 de ces groupes avaient été préalablement vaccinés contre ce virus.

Quelques jours plus tard, on remarque que :

- dans les 3 groupes de souris vaccinées, aucune souris n'est malade;
- dans chacun des groupes de souris non vaccinées, 23 souris ont développé la maladie.

1.
 - a. Il y a 5 groupes de 29 souris. $5 \times 29 = 145$.
Il y a 2 groupes de souris non vaccinées contenant chacun 23 souris ayant développé la maladie. $2 \times 23 = 46$.

La proportion de souris malades lors de ce test est $\frac{46}{145}$ car il y a 46 souris ayant développé la maladie sur 145 souris.

- b. Les décompositions en facteurs premiers de 46 et 145 sont : $46 = 2 \times 23$ et $145 = 5 \times 29$.

Ces deux décompositions permettent de dire que le seul diviseur commun à 46 et 145 est 1, on ne peut donc pas simplifier cette fraction.

Dans un laboratoire B on informe que $\frac{140}{870}$ des souris ont été malades.



2. a.

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

La décomposition en facteurs premiers de 140 est : $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$.

$$\begin{array}{r|l} 870 & 2 \\ 435 & 3 \\ 145 & 5 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

La décomposition en facteurs premiers de 870 est : $870 = 2 \times 3 \times 5 \times 29$.

b. $\frac{140}{870} = \frac{2 \times 2 \times \cancel{5} \times 7}{2 \times 3 \times \cancel{5} \times 29} = \frac{14}{87}$.

La forme irréductible de la proportion de souris malades dans le laboratoire

B est $\frac{14}{87}$.