Variables aléatoires réelles

1 Définitions et notations de base en probabilités (Vidéo 1)

Définition

- Une expérience est **aléatoire** lorsqu'on ne peut pas prévoir à l'avance quelle sera son résultat.
- Les différents résultats possibles sont appelés les **issues** de l'expérience.
- L'ensemble de toutes les issues possible d'une expérience aléatoire forme **l'univers**, noté Ω

Vocabulaire et notation :

- On appelle **événement** une partie de l'univers d'une expérience aléatoire.
- Si A est un événement, alors la probabilité qu'il soit réalisé est notée $p(A)$.

Exemple :

L'expérience aléatoire « *lancer un dé à six faces non truqué* » possède six issues : $\{1,2,3,4,5,6\}$
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ est donc l'univers de cette expérience aléatoire.
Si on appelle A l'événement obtenir $\{1,2\}$, on notera $p(A)$ sa probabilité de réussite.

Propriété :

Pour calculer la probabilité d'un événement A, on calcule

$$p(A) = \frac{\text{Nombre d'issues de } A}{\text{Nombre total d'issues}}$$

C'est un nombre réel, compris entre 0 et 1.
On peut l'écrire mathématiquement ainsi :

$$p(A) = \frac{\text{Card(A)}}{Card(\Omega)}$$

où Card est la fonction qui à chaque événement de Ω lui associe son nombre d'élément.

Exemple :

On reprend l'exemple précédent,avec A l'événement obtenir $\{1,2\}$.
Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, donc $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Remarques :

1. Le résultat d'une expérience aléatoire est défini par l'expérimentateur.
   On lance un dé cubique :
   - Si on s'intéresse au chiffre inscrit sur la face supérieure, un évènement élémentaire sera l'un des des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

- Par contre, si on s'intéresse à la parité du chiffre inscrit sur la face supérieure, un évènement élémentaire sera « pair » ou « impair ». L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{\text{pair,impair}\}$

2. L'univers Ω n'est pas toujours un ensemble fini .
   On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir « face » un résultat est un mot de longueur finie ou infinie formé avec les deux lettres P pour « pile » et F pour « face ».
   Par exemple, le résultat PPPF signifie qu'on a lancé quatre fois la pièce, les trois premiers lancers ont donné « pile » et le quatrième « face ».
   Ω est l'ensemble des mots de la forme $\underbrace{\text{P}\cdots\text{P}}_{k \text{ fois}}\text{F}$, $k \in \mathbb{N}$ et du mot de longueur infinie formé avec la lettre P.

2 Probabilités élémentaires (vidéo 2)

Définitions

- Lorsque l'événement A est **impossible**, alors $A = \varnothing$ et $p(A) = 0$.
- Lorsque l'événement A est **certain**, alors $A = \Omega$ et $p(A) = 1$. .
- Si A est un événement, on note $\overline{A}$ l'événement contraire de A. On a alors $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Exemple :

On lance un dé à 6 faces.
Si A est l'événement "*Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2*",
$\overline{A}$ est l'événement " Obtenir un nombre plus grand que 2".
$\overline{A}$ est réalisé par les issues $\{3,4,5,6\}$ donc $p(\overline{A}) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ et on a bien $p(A) = 1 - p(\overline{A})$

Définitions

On dit que deux expériences aléatoires sont **indépendantes** lorsque le résultat de l'une n'a pas d'influence sur le résultat de l'autre.

Exemple 1 :
Si on lance un dé non truqué 10 fois de suite.
Un résultat n'influence pas le lancer suivant.
Les dix lancers sont indépendants.

Exemple 2 :
Dans une urne contenant 3 boules noires et 4 boules rouges, on effectue deux tirages successifs **avec remise**. Les deux tirages sont **indépendants**.

Exemple 3 :
Dans une urne contenant 3 boules noires et 4 boules rouges, on effectue deux tirages successifs **sans remise**. Les deux tirages ne sont **pas indépendants**. Le deuxième tirage est influencé par le résultat du premier.

3 Variable aléatoire (vidéo 3)

Définition

Soit E l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire X définie sur E associe à chaque issue de E un nombre réel.

EXEMPLE :

Considérons un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance ce dé. L'ensemble des issues est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{6}$.
On convient que :

- si la face 6 apparaît on gagne 5 €
- si la face 5 apparaît on gagne 3 €,
- si la face 4 apparaît on gagne 1 €,
- sinon on perd 2 €.

On définit une fonction qui a chaque issue de associe le « gain » obtenu.
On a $\mathrm{X}(1) = -2 : \mathrm{X}(2) = -2 : \mathrm{X}(3) = -2 : \mathrm{X}(4) = 1 : \mathrm{X}(5) = 3 : \mathrm{X}(6) = 5$ $\mathrm{X} = -2$

Définition

Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire X définie sur Ω associe à chaque issue de Ω un nombre réel.
On a donc le schéma :

$$X(\text{issue de l'expérience aléatoire}) = \text{un nombre réel}$$

Une variable aléatoire permet de **numériser** les issues d'une expérience aléatoire.

4 LOI DE PROBABILITÉ (VIDÉO 4)

EXEMPLE :

Considérons un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'ensemble des issues est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{6}$.On convient que :

- si la face 6 apparaît on gagne 5 €
- si la face 5 apparaît on gagne 3 €,
- si la face 4 apparaît on gagne 1 €,
- sinon on perd 2 €.

On définit la variable aléatoire X qui a chaque issue de associe de Ω, associe le gain obtenu.
On a $\mathrm{X}(1) = -2 : \mathrm{X}(2) = -2 : \mathrm{X}(3) = -2 : \mathrm{X}(4) = 1 : \mathrm{X}(5) = 3 : \mathrm{X}(6) = 5$.

- $\mathrm{X} = -2$ correspond à l'événement obtenir $\{1;2;3\}$
- $\mathrm{X} = 1$ correspond à l'événement obtenir $\{4\}$
- $\mathrm{X} = 3$ correspond à l'événement obtenir $\{5\}$
- $\mathrm{X} = 5$ correspond à l'événement obtenir $\{6\}$

On peut alors définir la loi de probabilité de X :

x_i	-2	1	3	5
$p(X = x_i))$	0,5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition

Soit une variable aléatoire X définie sur un ensemble E et prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i, la probabilité $p(x_i)$

Remarque

Ω désigne un univers de n éventualités $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

- On a toujours :

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

- La probabilité d'un évènement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le constituent.

Application 1 :(vidéo 5)

On lance un dé cubique truqué.
L'événement élémentaire $\{6\}$ a une probabilité de 0,3, et l'événement élémentaire $\{1\}$ a une probabilité de 0,1.
Les 4 autres issues sont équiprobables.
Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

L'univers associé à cette expérience est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
On sait que $p_1 = 0{,}1$; $p_6 = 0{,}3$ et $p_2 = p_3 = p_4 = p_5$
D'après le cours, on a :
$\sum\limits_{i=1}^{6} p(e_i) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$
$\iff 0{,}4 + 4p_2 = 1$
$\iff p_2 = \dfrac{0{,}6}{4} = 0{,}15$
Il vient la loi de probabilité :

Issues	1	2	3	4	5	6
Probabilités	0,1	0,15	0,15	0,15	0,15	0,3

Application 2 :(vidéo 6)

On lance à trois reprises une pièce bien équilibrée et on note le résultat à l'aide d'un mot de trois lettres.
On appelle X la variable aléatoire qui associe à chaque éventualité de l'univers Ω le nombre de « pile ».

1. Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
2. Calculer $p(X = 2)$ puis $p(X < 2)$
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

1. L'univers associé à cette expérience est :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF\}$$

Il y a 8 issues équiprobables.

2. L'évènement « $X = 2$ » est constitué des issues $\{PPF, PFP, FPP\}$. On a donc $p(X=2) = \frac{3}{8}$

L'évènement « $X < 2$ » est constitué des issues $\{PFF, FPF, FFP, FFF\}$.On a donc $p(X=2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

3. La variable X peut prendre les valeurs $\{0;1;2;3\}$.

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Application 3 : (vidéo 7)

On définit une variable aléatoire Y avec la règle de jeu suivante : un joueur gagne 8 € s'il obtient trois « pile » successifs, il ne gagne rien s'il obtient deux « pile » et il perd 2 € dans tous les autres cas.

1. Déterminer les valeurs prises par Y
2. Déterminer les issues correspondant à l'événement $Y = -2$. En déduire $p(Y = -2)$
3. Déterminer $p(Y \geqslant 0)$

1. La variable Y peut prendre les valeurs -2, 0 ou 8.
2. L'évènement « $Y = -2$ » est constitué des issues $\{PFF, FPF, FFP, FFF\}$.
   On en déduit que $p(Y = -2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
3. L'évènement « $Y \geqslant 0$ » est constitué des issues $\{PPP, PPF, PFP, FPP\}$.
   On en déduit que $p(Y \geqslant 0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Application 4 : (vidéo 8)

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance deux dés cubiques équilibrés et on fait la somme des chiffres obtenus.
Un joueur gagne 10 € s'il obtient 12, il gagne 3 € si la somme des chiffres est un nombre impair, sinon le joueur perd 5 €.

1. Quel est l'univers de cette expérience aléatoire?
2. Déterminer la loi de probabilité sur Ω
3. On définit une variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le montant du gain.
   Déterminer la loi de probabilité de X

1. L'univers de cette expérience est $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

2. La loi de probabilité définie sur Ω est :

Issues	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilités	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3. Soit X la variable aléatoire définie sur Ω, qui prend les valeurs $\{-5,3,10\}$.
   - L'évènement $(X=10)$ est constitué de l'issue $\{12\}$ donc $p(X=10) = \frac{1}{36}$.
   - L'évènement $(X=3)$ est constitué des issues $\{3,5,7,9,11\}$ d'où $p(X=3) = \frac{2}{36}+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36} = \frac{1}{2}$.
   - Comme $p(X=-5)+p(X=3)+p(X=10)=1$, on en déduit que :
     $p(X=-5) = 1-p(X=3)-p(X=10) = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{36} = \frac{17}{36}$
     D'où la loi de probabilité de X :

x_i	-5	3	10
$p(X=x_i)$	$\frac{17}{36}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{36}$

5 ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE : (VIDÉO 9)

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, qui prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

On appelle espérance mathématique de X notée $\mathrm{E}(X)$, le réel :

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i\, p(X=x_i) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_k \times p_k$$

REMARQUES :

- On retient que, pour un grand nombre de tirages, l'espérance d'une variable aléatoire est la moyenne des valeurs de x_i affectées des fréquences p_i.
- Dans le cas particulier d'un jeu, l'espérance $\mathrm{E}(X)$ est le gain moyen par partie qu'un joueur peut espérer obtenir s'il joue un grand nombre de fois.
  Le signe de $\mathrm{E}(X)$ permet de savoir si le joueur a plus de chances de gagner que de perdre.
  Si $\mathrm{E}(X)=0$, on dit que le *jeu est équitable*.

Application :

Considérons un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. L'ensemble des issues est $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$. Chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{6}$.
On convient que :

- si la face 6 apparaît on gagne 5 €
- si la face 5 apparaît on gagne 3 €
- si la face 4 apparaît on gagne 1 € sinon on perd 2 €

On définit la variable aléatoire X qui a chaque issue de associe le × gain ⇝ obtenu.
Déterminer $E(X)$

On peut définir la loi de probabilité de X :
Dans l'exemple précédent, la loi de probabilité de X est :

x_i	-2	1	3	5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = -2\times\frac{1}{2}+\frac{1\times 1}{6}+\frac{3\times 1}{6}+\frac{5\times 1}{6} = -1+\frac{1}{6}+\frac{3}{6}+\frac{5}{6} = -1+\frac{9}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

On note $\quad E(X) = \frac{1}{2}$
L'espérance mathématique $\mathrm{E}(X) > 0$ donc le jeu est favorable au joueur.
Par exemple, si chaque joueur joue 6 parties, comme $6\times\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, un joueur gagnera en moyenne 3 €.

6 Variance & écart-type d'une variable aléatoire (vidéo 10)

Définition

Soit $\mathrm{X} = \{x_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ une variable aléatoire discrète.

- On appelle **variance mathématique** de X le nombre défini par :

$$V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[x_i - E(X)\right]^2 \times P(X = x_i).$$

- On appelle **écart-type** de X le nombre défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}\,.$$

Comprendre ces formules :

La Variance est un outil qui permet de calculer l'écart-type. Celui-ci est un paramètre de dispersion, qui mesure l'écart des valeurs autour de la moyenne.
La formule du calcul de la variance est complexe et pour l'apprendre, il faut la comprendre cette idée de distance à la moyenne :
On calcule pour chaque valeur de x_i la distance avec l'espérance : $E(X) - x_i$.
Pour éviter que des valeurs supérieures l'espérance ne compense des valeurs inférieures, on élève au carré pour rendre positif ce nombre.
Chaque distance au carrée est ensuite multipliée par son coefficient, sa probabilité.
La Variance mesure donc en quelque sorte le carré des écarts à la moyenne. Pour revenir sur une valeur correspondant à un écart moyen autour de la moyenne, on calcule sa racine carrée, avec l'écart-type.
Ainsi, l'écart-type représente l'écart moyen de chaque valeur de X à son espérance.

Application

Considérons une expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés cubiques non pipés (non truqués) et appelons S la variable aléatoire correspondant à la somme des faces obtenues.
Déterminer $E(S)$, $V(S)$ et $\sigma(S)$.

On a déjà calculé :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Pour calculer l'espérance, on applique le cours :

$$E(S) = 2 \times \frac{1}{36} + 3 \times \frac{1}{18} + 4 \times \frac{1}{12} + \cdots + 11 \times \frac{1}{18} + 12 \times \frac{1}{36} = 7$$

Cela signifie que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer obtenir en moyenne une somme égale à 7.
Ajoutons une ligne à la loi de probabilité de S :

$S = s_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S - E(S)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

On peut alors calculer la variance :
$V(S) = (-5)^2 \times \frac{1}{36} + (-4)^2 \times \frac{1}{18} + (-3)^2 \times \frac{1}{2} + \cdots + 5^2 \times \frac{1}{36} = \frac{35}{6}$
On obtient $V(S) \approx 5{,}83$ et donc $\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2{,}4$.
En obtenant $E(S) = 7$ et $\sigma(S) \approx 2{,}4$, on peut conclure que sur un grand nombre de lancers, on peut espérer en moyenne avoir une somme égale à 7 plus ou moins 2,4, soit une somme comprise entre 4,6 et 9,4.

7 Théorème de König-Huygens (Hors programme)

Soit $X = \{x_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une variable aléatoire discrète. Alors,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

DÉMONSTRATION :

$$\begin{aligned} V(X) = E\left[(X-E[X])^2\right] &= E\left[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2\right] \\ &= E\left[X^2\right] - E[2XE[X]] + E\left[E[X]^2\right] \\ &= E\left[X^2\right] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \end{aligned} \tag{.1}$$

REMARQUE :

Dans la pratique, ce théorème nous permet de calculer la variance de façon peut-être plus simple dans certains cas.

APPLICATION

Reprenons l'exemple du lancer de deux dés cubiques non pipés.
Ajoutons une ligne à la loi de probabilité de S :

$S = s_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$S^2 = s_i^2$	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$P(S = s_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned} E(X)S^2 &= 4 \times \frac{1}{36} + 9 \times \frac{1}{18} + 16 \times \frac{1}{2} + \cdots + 144 \times \frac{1}{36} \\ &= \frac{329}{6}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après le théorème de König-Huygens,

$$\begin{aligned} V(X)S &= \frac{329}{6} - 7^2 \\ &= \frac{35}{6} \\ &\approx 5{,}83 \end{aligned}$$

et donc :

$$\sigma(S) = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2{,}4.$$