Les fonctions trigonométriques

I Fonctions sinus et cosinus

1 Définitions

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions cosinus et sinus, telles que : $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$.
L'objectif du chapitre est d'étudier ces fonctions.

2 Périodicité

Pour tout réel x, on sait que :

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x+2\pi) = \sin(x)$$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques** de période 2π.

Démonstration

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π. Ainsi, les nombres x et $x+2\pi$ auront la même image sur le cercle trigonométrique, ce qui signifie que :

$$\cos(x) = \cos(x+2\pi) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \sin(x+2\pi).$$

De plus, les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$.

Vocabulaire :

On dit que $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π-périodiques.
On peut aussi dire que les fonctions sont périodiques de période 2π.

Conséquence :

La fonction cosinus (ou la fonction sinus) est entièrement connue dès qu'on connaît ses valeurs sur un intervalle $[a; a+2\pi[$ d'amplitude 2π.

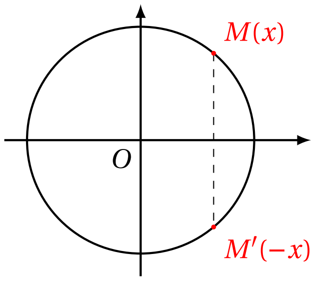
3 Parité

- Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$.
  On dit que la fonction **cosinus** est **paire**.
  La courbe représentative de la fonction cosinus admet l'axe des ordonnées pour **axe de symétrie**.
- Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$.
  On dit que la fonction **sinus** est **impaire**.
  La courbe représentative de la fonction sinus admet l'axe l'origine du repère pour **centre de symétrie**.

Extrait d'un document d'Arié Yallouz, avec son aimable autorisation

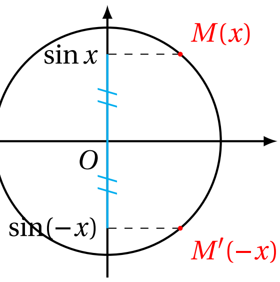
Démonstration :

- Fonction $x \mapsto \cos x$.
  Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc centré en 0.
  De plus, nous avons :



  Deux points du cercle trigonométriques, associés à deux valeurs opposées ont la même abscisse. Ainsi, $\cos(-x) = \cos(x)$.
  La fonction $x \mapsto \cos x$ est donc paire.

- Fonction $x \mapsto \sin x$.
  Son domaine de définition est $\mathbb{R}$, donc centré en 0.
  De plus, nous avons :



  Deux points du cercle trigonométriques, associés à deux valeurs opposées ont des ordonnées opposées (M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses). Ainsi, $\sin(-x) = -\sin(x)$

Remarque :

Il suffit d'étudier les fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0;\pi]$ pour les connaître sur $[-\pi;\pi]$ à l'aide de la parité et enfin sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la périodicité.

4 Variation

Sur $[0;\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$	1	↘	0	↘	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	↗	1	↘	0

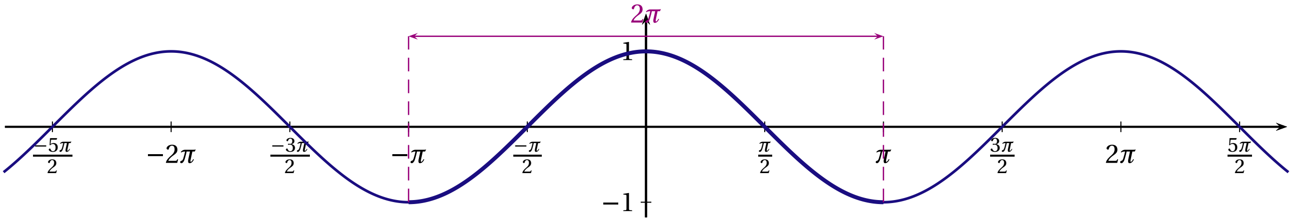
Sur $[-\pi;\pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$	-1	↗	0	↗	-1	↘	0	↘	-1

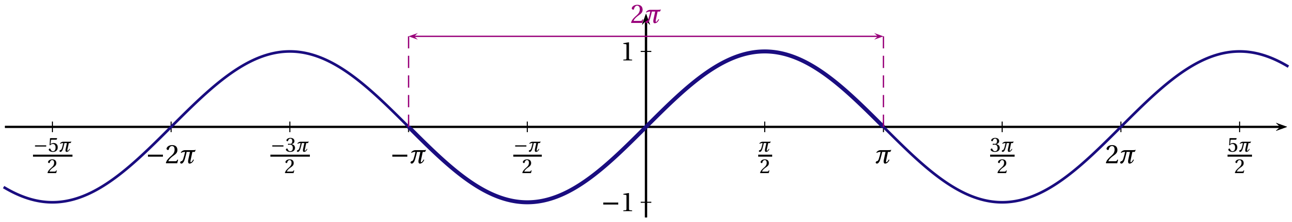
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

5 COURBES

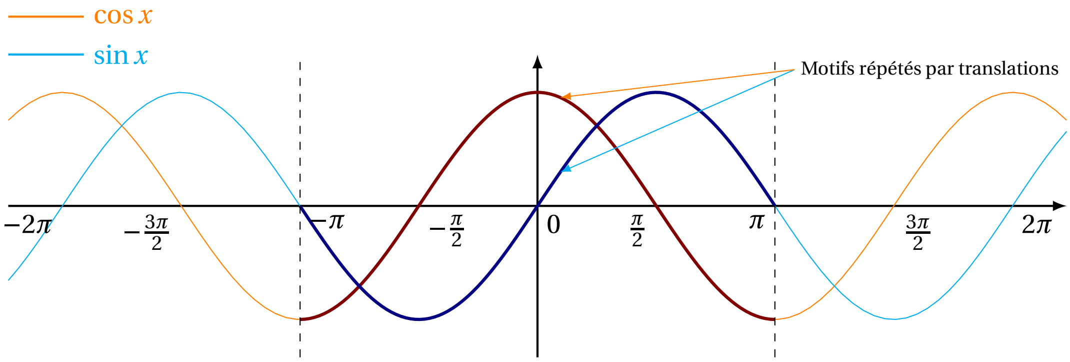
FONCTION COSINUS



FONCTION SINUS



Tracées dans le même repère, les courbes représentatives sont les suivantes :

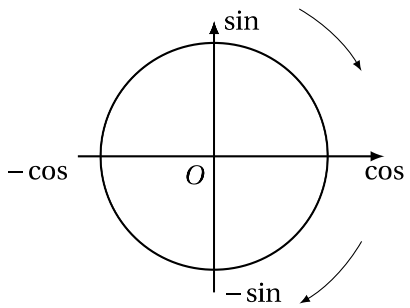


6 DÉRIVÉES

- La dérivée de la fonction $x \mapsto \cos x$ est la fonction $x \mapsto -\sin x$.
- La dérivée de la fonction $x \mapsto \sin x$ est la fonction $x \mapsto \cos x$.

Premier moyen mnémotechnique :

Dériver revient à tourner de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre :



Deuxième moyen mnémotechnique :
Le **Si**nus est **Si**mple, donc sa dérivée est Cosinus.
Le **Co**sinus est **Co**mpliqué, donc sa dérivée est l'opposé de Sinus.

7 Dérivées fonctions composées

- La dérivée de la fonction $x \mapsto \cos(ax+b)$ est la fonction $x \mapsto -a\sin x$.
- La dérivée de la fonction $x \mapsto \sin(ax+b)$ est la fonction $x \mapsto a\cos x$.

Application

Soit f la fonction définie sur $I = [0;2\pi]$ par $f(x) = -2\ sin(3x-1)$.
f est dérivable sur I et on a :
$(\sin(3x-1))' = 3\ cos(3x-1)$ donc $f'(x) = -2 \times 3cos(3x-1) = -6cos(3x-1)$